BU

BAITURSYNULY UNIVERSITY

ISSN 2310-3353

«АХМЕТ БАЙТҰРСЫНҰЛЫ АТЫНДАҒЫ ҚОСТАНАЙ ӨҢІРЛІК УНИВЕРСИТЕТІ» КЕАҚ

ҚМПИ ЖАРШЫСЫ

КӨПСАЛАЛЫ ҒЫЛЫМИ ЖУРНАЛЫ
МНОГОПРОФИЛЬНЫЙ НАУЧНЫЙ ЖУРНАЛ

№ 1
2025

PUBLISHINGS KSPI | **ҚМПИ ЖАРШЫСЫ** | **ВЕСТНИК КГПИ**

BU
BAITURSYNULY UNIVERSITY

2025 ж., қаңтар, №1 (77)
Журнал 2005 ж. қаңтардан бастап шығады
Жылына төрт рет шығады

Құрылтайшы: ***Ахмет Байтұрсынұлы атындағы Қостанай өңірлік университеті***

Тіркеу туралы куәлік №5452-Ж
Қазақстан Республикасының ақпарат министрлігімен 17.09.2004 берілген.
Мерзімді баспа басылымын қайта есепке алу 07.11.2023 ж.
Жазылу бойынша индексі 74081

Редакцияның мекен-жайы:
110000, Қостанай қ., Байтұрсынов к., 47
(Редакциялық-баспа бөлімі)
Тел.: 8(7142) 51-11-76

КӨПСАЛАЛЫ ҒЫЛЫМИ ЖУРНАЛЫ | № 1 (77) 2025 | МНОГОПРОФИЛЬНЫЙ НАУЧНЫЙ ЖУРНАЛ

№1 (77), январь 2025 г.
Издается с января 2005 года
Выходит 4 раза в год

Учредитель: ***Костанайский региональный университет имени Ахмет Байтұрсынұлы***

Свидетельство о регистрации № 5452-Ж
выдано Министерством информации Республики Казахстан 17.09.2004 г.
Переучёт периодического печатного издания 07.11.2023 г.
Подписной индекс 74081

Адрес редакции:
110000, г. Костанай, ул. Байтурсынова, 47
(Редакционно-издательский отдел)
Тел.: 8(7142) 51-11-76

жұлдыз тәрізді функцияларының $S_n^*[A,B]$ класына жатады. Берілген класс үшін өсу теоремасы алынады және α ретінің жұлдыз тәрізділік радиусы анықталады, оның ішінде $g(z)$ функциясы дөңес болған жағдайда. Ерекше жағдайларда бұрын белгілі және жаңа нәтижелер сериясы алынады. Алынған барлық нәтижелер дәл болып табылады.

Түйінді сөздер: *жұлдыз тәрізді функциялар, өсу теоремасы, жұлдыз тәрізді радиустар.*

MAYER, F.F.

ON SOME CLASSES OF CLOSE-TO-STARLIKE FUNCTIONS BASED ON THE YANOVSKIY CLASS

The article examines the class $CS_n^*(a,\gamma,A,B)$ of close-to-starlike functions $f(z)$, defined using the condition $\left|\left(\frac{f(z)}{g(z)}\right)^{1/\gamma} - a\right| \le a$, $a > 1/2$, $0 < \gamma \le 1$, where the function $g(z)$ belongs to the class $S_n^*[A,B]$ of Yanovskiy starlike functions. For this class, the growth theorem is obtained and the radius of starlikeness formation of the order α is determined, including in case when the function $g(z)$ is convex. In particular cases, a number of previously known and new results are obtained. All the results obtained are accurate.

Keywords: *close-to-starlike functions; growth theorem; radii of starlikeness.*

Сведения об авторе:

Майер Федор Федорович *– кандидат физико-математических наук, доцент, и.о. профессора кафедры математики и физики, Костанайский региональный университет имени Ахмет Байтұрсынұлы, г. Костанай, Республика Казахстан.*

Майер Федор Федорович *– физика-математика ғылымдарының кандидаты, доцент, математика және физика кафедрасы профессорының м.а., Ахмет Байтұрсынұлы атындағы Қостанай өңірлік университеті, Қостанай қ., Қазақстан Республикасы.*

Mayer Fyodor Fyodorovich *– Candidate of Physical and Mathematical Sciences, acting Professor of the Department of Mathematics and Physics, Akhmet Baitursynuly Kostanay Regional University, Kostanay, Republic of Kazakhstan.*

УДК 517.54

Майер, Ф.Ф.,
кандидат физико-математических наук,
доцент, и.о. ассоциированного профессора
(доцента) кафедры математики и физики,
КРУ имени Ахмет Байтұрсынұлы,
г. Костанай, Республика Казахстан
Хабдуллина, Г.Ж.,
магистр математики, старший преподаватель
кафедры математики и физики,
КРУ имени Ахмет Байтұрсынұлы,
г. Костанай, Республика Казахстан

ИНТЕГРАЛЬНЫЙ ОПЕРАТОР БЕРНАЦКОГО НА КЛАССЕ ЗВЕЗДООБРАЗНЫХ ФУНКЦИЙ ЯКУБОВСКОГО

Аннотация

В геометрической теории функций различным интегральным операторам посвящен большой цикл работ, в которых определяется образ заданного класса регулярных функций при интегральном преобразовании, либо исследуется область значений, входящих в этот оператор показателей, при *которых он осуществляет отображение класса S однолистных функций (либо его подклассов) в себя или в другие подклассы.*

В настоящей статье исследуется множество значений вещественного показателя, при котором интегральный оператор Бернацкого отображает класс звездообразных в единичном круге функций Яновского, имеющих разложение вида $f(z) = z + a_{n+1}z^{n+1} + a_{n+2}z^{n+2} + \cdots, z \in E, n \geq 1,$ и удовлетворяющих условию $\left|z\frac{f'(z)}{f(z)} - a\right| \leq b$ в класс $K(\gamma)$ функций, почти выпуклых порядка γ, или, в частности, в класс S^0 выпуклых функций. Также получены теоремы искажения и вращения для интеграла Бернацкого на классе звездообразных функций Яновского. Результаты статьи обобщают или усиливают ранее известные результаты.

Ключевые слова: *однолистные функции, интегральный оператор Бернацкого, выпуклые функции, звездообразные функции, почти выпуклые функции.*

1 Введение

Пусть $\mathcal{R}$ есть класс регулярных в круге $E = \{z: |z| < 1\}$ функций $f(z) = z + a_2z^2 + a_3z^3 + \cdots, z \in E$, и S, S^0, S^* и K – классы функций $f(z) \in \mathcal{R}$, соответственно однолистных, выпуклых, звездообразных и почти выпуклых в E [1].

Рассмотрим классы $S_n^*(a,b)$ и $S_n^0(a,b)$ функций $f(z) \in S$, имеющих разложение в ряд вида

$$f(z) = z + a_{n+1}z^{n+1} + a_{n+2}z^{n+2} + \cdots,\ \ z \in E,\ \ n \geq 1, \tag{1}$$

и удовлетворяющих соответственно условиям

$$\left|z\frac{f'(z)}{f(z)} - a\right| \leq b,\ \ z \in E, \tag{2}$$

$$\left|1 + z\frac{g''(z)}{g'(z)} - a\right| \leq b,\ \ z \in E. \tag{3}$$

В обоих случаях считается, что $a, b \in \mathbb{R}$, причем $|a - 1| < b < a$.

Класс $S_1^*(1,1)$ был введен и изучался в работе [2]. При $n = 1$ классы $S^*(a,b)$ и $S^0(a,b)$ были введены Якубовским и изучались в работах [3-5], а при $n \geq 1$ – в работе [6].

Между классами $S_n^*(a,b)$ и $S_n^0(a,b)$ имеется простая связь, которая выражается соотношением

$$g(z) \in S_n^0(a,b) \quad \Leftrightarrow \quad f(z) = zg'(z) \in S_n^*(a,b). \tag{4}$$

Кроме того, $S_n^*(a,b) \subset S_\beta^*$ и $S_n^0(a,b) \subset S_\beta^0$ при $\beta = a - b$, где S_β^* и S_β^0 – классы звездообразных порядка β и выпуклых порядка β функций, удовлетворяющих соответственно условиям $Re\, z\frac{f'(z)}{f(z)} \geq \beta$ и $1 + Re\, z\frac{g''(z)}{g'(z)} \geq \beta$.

В ряде работ (напр., [4, 6]) изучался класс $S_n^*[A,B]$ функций $f(z)$, удовлетворяющих условию $z\frac{f'(z)}{f(z)} \prec \frac{1+Az}{1+Bz},\ \ z \in E, -1 \leq B < A \leq 1$, известный как класс звездообразных функций Яновского, и аналогичный класс $S_n^0[A,B]$. В [4] найдены соотношения между параметрами a, b и A, B, обеспечивающими совпадение классов $S_n^*(a,b)$ и $S_n^*[A,B]$ ($S_n^0(a,b)$ и $S_n^0[A,B]$).

Пусть $K(\gamma)$ – класс функций, почти выпуклых порядка γ, заданный с помощью условия

$$\left|arg\ \frac{f'(z)}{g'(z)}\right| \leq \gamma\frac{\pi}{2},\ \ 0 \leq \gamma \leq 1,\ \ z \in E, \tag{5}$$

где $g(z) \in S^0$. При $\gamma = 1$ класс $K = K(1)$ введен Одзаки и Капланом (см. [1, §4], а в общем случае, при $0 \leq \gamma \leq 1$ – Ридом [7] и Реньи [8]. Заметим, что $S^0 = K(0) \subset K(\gamma) \subset K(1) = K,\ \ 0 \leq \gamma \leq 1$.

Соотношение (4) выражает и хорошо известную связь классов выпуклых и звездообразных функций. Именно $g(z) \in S^0 \Leftrightarrow f(z) = zg'(z) \in S^*$. Равенство $f(z) = zg'(z)$

можно рассматривать как дифференциальный оператор $\Psi[g](z) = zg'(z)$, представляющий собой биекцию $S^{\circ} \to S^{*}$. Интегральный оператор Бернацкого (см. [1], §14)

$$\Phi(z) = J_{\delta}[f](z) = \int_0^z \left(\frac{f(t)}{t}\right)^{\delta} dt, \;\; \delta \in \mathbb{R}, \delta \neq 0, \tag{6}$$

при $\delta = 1$ является обратным к оператору $\Psi[g](z)$ и превращается в классический интеграл Бернацкого [1, §14]. Среди исследований оператора (6) отметим работы [5, 9-12].

Например, в работе [9] Меркесом и Райтом установлено, что если $f(z) \in S^{*}$, то $\Phi(z)$ будет почти выпуклой, если $-1/2 \leq \delta \leq 3/2$. Отметим также интересный результат Прохорова [10], где получены точные данные о преобразованиях $J_{\delta}[f](z)$: $K(\gamma_1) \to K(\gamma_2)$ и $J_{\delta}[f](z)$: $S_{\beta}^{*} \to K(\gamma)$.

Вместе с оператором (6) часто рассматривают и тесно связанный с ним оператор (напр., [5])

$$G(z) = I_{\delta}[g](z) = \int_0^z \left(g'(t)\right)^{\delta} dt, \;\; \delta \in \mathbb{R}, \delta \neq 0. \tag{7}$$

В настоящей работе в форме (3) получено достаточное условие однолистности (почти выпуклости порядка γ) функции $f(z)$ с разложением вида (1) и исследуются свойства интегрального оператора Бернацкого (6) в предположении, что $f(z) \in S_n^{*}(a, b)$. Полученные результаты усиливают, дополняют или обобщают целый ряд ранее известных результатов.

2 Материалы и методы

Базовым методом исследования данной статьи является метод подчиненности регулярных функций. Регулярную в E функцию $\varphi(z)$ называют подчиненной регулярной однолистной в E функции $\varphi_0(z)$, если $\varphi(E) \subset \varphi_0(E)$ и $\varphi(0) = \varphi_0(0)$. Если функция $\varphi(z)$ подчинена функции $\varphi_0(z)$, то используют обозначение $\varphi(z) \prec \varphi_0(z)$,

В статье [13], опираясь на подходы из [1, §9], получен следующий признак однолистности.

Лемма 1. *Пусть* $f(z)$ *из* $\mathcal{R}$ *разлагается в ряд* (1) и *удовлетворяет условию* $z\frac{f''(z)}{f'(z)} \prec \varphi_0(z)$, *где* $\varphi_0(z)$ *– однолистна и звездообразна в круге* E, причем $Re\,\varphi_0(z) \geq -A,\; A > 0,\; z \in E$.

Если $0 < A \leq 1$, *то* $f(z) \in S^{\circ}$. *Если же* $A > 1$ *и выполняется условие*

$$\frac{A-1}{A}\omega(\varphi_0) \leq n\gamma\frac{\pi}{2}, \quad \omega(\varphi_0) = \max_{|z|\leq 1}\left|Im\int_0^z \varphi_0(t)\frac{dt}{t}\right|, \tag{8}$$

то функция $f(z)$ *является однолистной и почти выпуклой порядка* γ *в круге* E.

Теорема 1. *Пусть функция* $f(z)$ *из* $\mathcal{R}$ *разлагается в ряд вида* (1) *и удовлетворяет условию*

$$\left|z\frac{f''(z)}{f'(z)} - m\right| \leq M, \;\; m, M \in \mathbb{R}, |m| < M, z \in E. \tag{9}$$

Если $m - M \geq -1$, *то* $f(z) \in S^{\circ}$. *Если же* $m - M \leq -1$ *и выполняется условие*

$$M \leq 1 + n\gamma\frac{\pi}{2}, \qquad (m = 0), \tag{10}$$

$$\frac{(M-m-1)(m+M)}{m}\arcsin\frac{m}{M} \leq n\gamma\frac{\pi}{2}, \qquad (m \neq 0), \tag{11}$$

то функция $f(z)$ *является однолистной и почти выпуклой порядка* γ *в круге* E.

Доказательство. Случай $0 < A \leq 1$ очевиден. При $A > 1$ в силу условия (10) имеем

$$z\frac{f''(z)}{f'(z)} \prec \varphi_0(z) = \frac{(M^2 - m^2)z}{M - mz}, \;\; |m| < M, \tag{12}$$

где $\varphi_0(z)$ – отображение круга E на круг $|w - m| < M$, нормированное условием $\varphi_0(0) = 0$.

Пусть $m \neq 0$. По формуле (9) с учетом (12) находим

$$\omega(\varphi_0) = (M^2 - m^2)\max_{|z|\leq 1}\left|Im\int_0^z \frac{dt}{M - mt}\right| = \frac{(M^2 - m^2)}{|m|}\max_{|z|\leq 1}\left|arg\left(1 - \frac{m}{M}z\right)\right|.$$

Учитывая, что в силу (9) $|m| < M$, получаем

$$\omega(\varphi_0) = \frac{(M^2 - m^2)}{|m|} \arcsin \frac{|m|}{M} = \frac{(M^2 - m^2)}{m} \arcsin \frac{m}{M}.$$

При $m = 0$, учитывая, что $\varphi_0(z) = Mz$, аналогично находим $\omega(\varphi_0) = M$.

Обозначим $A = -(m - M)$. Поскольку в силу (9) $Re\,\varphi_0(z) \geq m - M = -A$ и выполняются условия (10)-(11), то выполнены все условия леммы 1. Поэтому $f(z) \in K(\gamma)$. Теорема доказана.

Следствие 1. $f(z) \in K(\gamma)$, *если она имеет вид* (1) *и удовлетворяет одному из условий*

$$Re\, z \frac{f''(z)}{f'(z)} \leq \frac{n\gamma}{2}, \qquad Re\, z \frac{f''(z)}{f'(z)} \geq -\left(1 + \frac{n\gamma}{2}\right). \qquad (13-14)$$

Следствие 1 получается из теоремы 1 переходом к пределу при $M \to \infty$ в случаях, когда $m + M = h\ (h = const), h > 0$, или $m - M = -h\ (h = const), h > 0$.

Отметим, что при $n = \gamma = 1$ условия однолистности (13-14) в виде $Re\, z\, f''(z)/f'(z) \leq 1/2$ и $Re\, z\, f''(z)/f'(z) \geq -3/2$ первоначально получены в работах Одзаки и Умедзавы [1, §9].

3-4 Результаты и обсуждение

3-4.1 Геометрические свойства интеграла Бернацкого на классе $S_n^*(a, b)$

Теорема 2. *Пусть* $f(z) \in S_n^*(a, b)$. *Тогда интеграл Бернацкого* $\Phi(z)$ *является функцией, почти выпуклой порядка* $\gamma \geq \gamma_0$, *причем:*

при $a = 1$

$$\gamma_0 = \frac{2}{n\pi} \begin{cases} 0, & \delta \in [-1/b; 1/b] \\ (|\delta|b - 1), & \delta \notin [-1/b; 1/b] \end{cases}; \qquad (15)$$

при $a \neq 1$

$$\gamma_0 = \begin{cases} \dfrac{2}{n\pi} \dfrac{[\delta b - \delta(a-1) - 1](b + a - 1)}{a - 1} \arcsin \dfrac{a-1}{b}, \delta \geq \dfrac{1}{1 - (a - b)} \\ 0, \qquad \dfrac{1}{1 - (a + b)} \leq \delta \leq \dfrac{1}{1 - (a - b)} \\ \dfrac{2}{n\pi} \dfrac{[\delta b + \delta(a-1) + 1](a - 1 - b)}{a - 1} \arcsin \dfrac{a-1}{b}, \delta \leq \dfrac{1}{1 - (a + b)} \end{cases} \qquad (16)$$

Доказательство. Из соотношения (6) с учетом того, что $f(z) \in S_n^*(a, b)$, находим

$$\left|\frac{1}{\delta} z \frac{\Phi''(z)}{\Phi'(z)} - (a - 1)\right| \equiv \left|z \frac{f'(z)}{f(z)} - a\right| \leq b \quad \text{или} \quad \left|z \frac{\Phi''(z)}{\Phi'(z)} - \delta(a - 1)\right| \leq |\delta| b, \quad (17)$$

то есть выполняется условие (9) с $m = \delta(a - 1)$ и $M = |\delta| b$.

Согласно теореме 1, если $m - M \geq -1$, то есть выполняется условие

$$\delta(a - 1) - |\delta| b \geq -1, \qquad (18)$$

то функция $\Phi(z)$ является выпуклой в круге E.

Пусть $a = 1$, то есть $m = 0$. Тогда условие (18) приобретает вид $|\delta| \leq 1/b$ и интеграл Бернацкого $\Phi(z)$ будет выпуклой функций в круге E при всех $\delta \in [-1/b; 1/b]$. Если же $\delta \leq -1/b$ или $\delta \geq 1/b$, то $m - M \leq -1$ и функция $\Phi(z)$ будет почти выпуклой порядка γ в круге E, причем

$$\gamma \geq \gamma_0 = \frac{2}{n\pi}(M - 1) = \frac{2}{n\pi}(|\delta| b - 1). \qquad (19)$$

Пусть $a \neq 1$, то есть $m \neq 0$. Найдем, при каких δ выполняется (18), то есть $\Phi(z) \in S^{\circ}$.

Если $\delta > 0$, то условие (18) принимает вид $\delta(a - 1) - \delta b \geq -1$ или $\delta\big(1 - (a - b)\big) \leq 1$. Поскольку в силу (2) $1 - (a - b) > 0$, то $\delta \leq 1/[1 - (a - b)]$.

Если же $\delta < 0$, то из условия (18) получаем $\delta(a - 1) + \delta b \geq -1$ или $\delta\big(1 - (a + b)\big) \leq 1$, которое с учетом неравенства $a + b > 1$ приобретает вид $\delta \geq 1/[1 - (a + b)]$.

Объединяя случаи $\delta > 0$ и $\delta < 0$, получаем, что условие (18) равносильно неравенству $1/[1 - (a + b)] \leq \delta \leq 1/[1 - (a - b)]$, при выполнении которого $\Phi(z) \in S^{\circ}$.

Пусть теперь

$$\delta(a-1)-|\delta|b\leq -1, \tag{20}$$

то есть $m-M\leq -1$. С учетом вышеизложенного это означает, что $\delta\notin[\frac{1}{1-(a+b)};\frac{1}{1-(a-b)}]$. В этом случае по теореме 1 порядок почти выпуклости функции $\Phi(z)$ определяется из соотношения (11), то есть $\gamma\geq\ \gamma_0$, где

$$\gamma_0=\frac{2}{n\pi}\frac{(M-m-1)(m+M)}{m}\arcsin\frac{m}{M}$$

или

$$\gamma_0=\frac{2}{n\pi}\frac{(|\delta|b-\delta(a-1)-1)(\delta(a-1)+|\delta|b)}{\delta(a-1)}\arcsin\frac{\delta(a-1)}{|\delta|b}. \tag{21}$$

Рассмотрим два случая.

Пусть $\delta\geq\frac{1}{1-(a-b)}$. Тогда $\delta>0$ и из (21) получаем

$$\gamma_0=\frac{2}{n\pi}\frac{(\delta b-\delta(a-1)-1)(b+a-1)}{a-1}\arcsin\frac{a-1}{b}. \tag{22}$$

Если $\delta\ \leq\frac{1}{1-(a+b)}$, тогда $\delta<0$ и (21) преобразуется к виду

$$\gamma_0=\frac{2}{n\pi}\frac{(\delta b+\delta(a-1)+1)(a-1-b)}{a-1}\arcsin\frac{a-1}{b}. \tag{23}$$

Учитывая, что $\Phi(z)\in S^{0}$ при $\gamma=0$, в силу (22) и (23) приходим к утверждению теоремы 2.

Поскольку $K(0)=S^{0}$, то при $\gamma=0$ из теоремы 2 вытекает следующий результат статьи [11].

Следствие 2 [11]. *Пусть* $f(z)\in S_n^*(a,b)$. *Тогда, если* $\delta\in[-1/b;1/b]$ *при* $a=1$ *и* $\delta\in[\frac{1}{1-(a+b)};\frac{1}{1-(a-b)}]$ *при* $a\neq 1$, *то* $\Phi(z)\in S^{0}$.

Следствие 3. *Если* $f(z)\in\ S^*(\beta)$ и *имеет вид* (1), *то* $\Phi(z)\in K(\gamma)$, *причем* $\gamma\geq\ \gamma_0$, *где*

$$\gamma_0=\frac{2}{n}\begin{cases}-\delta(1-\beta), & \delta<0,\\ 0, & 0<\ \delta\leq 1/1-\beta\,,\\ [\delta(1-\beta)-1], & \delta\geq 1/1-\beta\,.\end{cases}$$

Доказательство. Зафиксируем $a-b=\beta, 0\leq\beta<1$. Тогда при $b\to\infty$ класс $S_n^*(a,b)$ преобразуется класс S_β^*. Полагая $a=b+\beta$ в (22) и в (23), и переходя к пределу при $b\to\infty$, получим соответственно $\gamma_0=\frac{2}{n}[\delta(1-\beta)-1]$ при $\delta\geq\frac{1}{1-(a-b)}=\frac{1}{1-\beta}$ и $\gamma_0=-\frac{2}{n}\delta(1-\beta)$ при $\delta<\frac{1}{1-(a+b)}=\lim\limits_{b\to\infty}\frac{1}{1-(2b+\beta)}=0$. Выпуклость $\Phi(z)$ при $0<\ \delta\leq 1/(1-\beta)$ очевидна.

При $n=1$ этот результат получен другим способом в работе [10] и позже, как следствие из основного результата, в [12]. Отметим также, что в [10] обоснована и точность данного результата.

Следствие 4. *Пусть* $f(z)\in S_n^*(a,b)$ *и выполняется условие*

$$-\frac{n\pi}{2}\frac{a-1}{(b^2-(a-1)^2)\arcsin\frac{a-1}{b}}+\frac{1}{1-(a+b)}\leq\delta\ \leq\frac{1}{1-(a+b)} \tag{24}$$

или

$$\frac{1}{1-(a-b)}\leq\delta\ \leq\frac{n\pi}{2}\frac{a-1}{(b^2-(a-1)^2)\arcsin\frac{a-1}{b}}+\frac{1}{1-(a-b)}, \tag{25}$$

то $\Phi(z)\in K$.

Доказательство. Рассмотрим случай $\gamma=1$ теоремы 2.

Пусть $\delta\geq\frac{1}{1-(a-b)}$. Тогда из условия (16) получаем

$$\frac{2}{n\pi}\frac{[\delta b-\delta(a-1)-1](b+a-1)}{a-1}\arcsin\frac{a-1}{b}\leq 1$$

или

$$\delta b-\delta(a-1)\le\frac{n\pi}{2}\frac{a-1}{(b+a-1)\arcsin\frac{a-1}{b}}+1,$$

откуда вытекает правая оценка (25).

Если $\delta\ \le\frac{1}{1-(a+b)}$, то аналогично с учетом неравенства $a-1-b<0$ находим

$$\delta b+\delta(a-1)\ge\frac{n\pi}{2}\frac{a-1}{(a-1-b)\arcsin\frac{a-1}{b}}-1,$$

откуда получаем левую оценку (24).

Следствие 4 усиливает и обобщает на случай $n\ge 1$ теорему 1 из [5]. Кроме того, при $a-b=0,\ b\to\infty$ класс $S_n^*(a,b)$ преобразуется в класс S^*, и следствие 4 приводит к обобщению на случай $n\ge 1$ известного результата Меркеса и Райта [9].

Следствие 4 усиливает и обобщает на случай $n\ge 1$ теорему 1 из [5]. Кроме того, $S_n^*(a,b)=S^*$ при $a-b=0,\ b\to\infty$ и мы получаем обобщение на случай $n\ge 1$ результата Меркеса и Райта [9].

Следствие 5. *Пусть* $f(z)\in S^*$ *и разлагается в степенной ряд вида* (1). Тогда $\Phi(z)\in K$, если

$$-\frac{n}{2}\le\delta\ \le\frac{n}{2}+1.$$

3-4.2 Теорема искажения для интеграла Бернацкого на классе $S_n^*(a,b)$

Лемма 2. *Пусть* $f(z)\in S_n^*(a,b)$. *Тогда*

$$\ln\Phi'(z)\prec\psi_0(z)=\frac{\delta}{n}\begin{cases} bz\,, & a=1,\\ \dfrac{b^2-(a-1)^2}{1-a}\ln\left(1+\dfrac{1-a}{b}z\right), & a\ne 1.\end{cases}\qquad(26)$$

Доказательство. Поскольку $f(z)\in S_n^*(a,b)$, то

$$z\,\frac{f'(z)}{f(z)}\prec\frac{b+(b^2-a^2+a)z}{b+(1-a)z}.$$

Поэтому с учетом (6) получаем

$$z\,(\ln\Phi'(z))'=\delta\left(z\,\frac{f'(z)}{f(z)}-1\right)\prec\varphi_0(z)=\delta\frac{[b^2-(a-1)^2]z}{b+(1-a)z}.\qquad(27)$$

В статье [14] установлено, что если функция $\varphi(z)=c_nz^n+c_{n+1}z^{n+1}+\cdots,\ \ z\in E,\ n\ge 1$, удовлетворяет условию $z\varphi'(z)\prec\varphi_0(z)$, где функция $\varphi_0(z)$ звездообразна в E, то

$$\varphi(z)\prec\psi_0(z)=\frac{1}{n}\int_0^z\frac{\varphi_0(t)}{t}dt.$$

В силу этого, из подчиненности (27) получаем

$$\ln\Phi'(z)\prec\psi_0(z)=\frac{\delta}{n}\int_0^z\frac{b^2-(a-1)^2}{b+(1-a)t}dt,$$

откуда после вычисления интеграла с учетом двух случаев ($a=1$ и $a\ne 1$), приходим к (26).

Теорема 3. *Если* $f(z)\in S_n^*(a,b)$, *то в круге* $|z|\le r$ *выполняются точные оценки*

1) *при* $a=1$

$$exp\left(-\frac{|\delta|b}{n}r^n\right)\le|\Phi'(z)|\le exp\left(\frac{|\delta|b}{n}r^n\right),\qquad(29)$$

$$|\arg\Phi'(z)|\le\frac{|\delta|b}{n}r^n,\qquad(30)$$

2) *при* $a\ne 1$

$$\left(1-(sign\,\delta)\frac{1-a}{b}r^n\right)^{\frac{b^2-(1-a)^2}{n(1-a)}}\le|\Phi'(z)|\le\left(1+(sign\,\delta)\frac{1-a}{b}r^n\right)^{\frac{b^2-(1-a)^2}{n(1-a)}}.\qquad(31)$$

$$|\arg \Phi'(z)| \leq \frac{|\delta|[\, b^2-(1-a)^2]}{n(1-a)} \arcsin\left(\frac{1-a}{b} r^n\right). \qquad (32)$$

Доказательство. Поскольку $f(z) \in S^*(a,b)$, то в силу леммы 2 имеет место подчиненность (26). Обозначая $E_r = \{z: |z| \leq r\}$, с учетом разложения $\ln \Phi'(z) = c_n z^n + c_{n+1}z^{n+1} + \cdots, n \geq 1$, на основе метода подчиненности получим включение областей

$$\ln \Phi'(E_r) \subset \psi_0(E_{r^n}). \qquad (33)$$

Поскольку область $\psi_0(E)$ является выпуклой и симметрична относительно действительной оси, то

$$\min_{|z|\leq r} Re\, \psi_0(z) = \psi_0(-(sign\, \delta)\cdot r), \qquad \max_{|z|\leq r} Re\, \psi_0(z) = \psi_0((sign\, \delta)\cdot r)$$

и в силу (33) в круге $|z| \leq r$ имеет место оценка

$$-(sign\, \delta)\frac{\delta b}{n} r^n \leq Re \ln \Phi'(z) = \ln|\Phi'(z)| \leq (sign\, \delta)\frac{\delta b}{n} r^n \quad \text{при} \quad a = 1$$

и

$$\frac{1}{n}\frac{b^2-(1-a)^2}{1-a}\ln\left(1-(sign\, \delta)\frac{1-a}{b}r^n\right) \leq Re \ln \Phi'(z) = \ln|\Phi'(z)| \leq$$
$$\leq \frac{1}{n}\frac{b^2-(1-a)^2}{1-a}\ln\left(1+(sign\, \delta)\frac{1-a}{b}r^n\right) \text{ при } a \neq 1,$$

откуда вытекают оценки (29) и (31).

Для доказательства оценок (30) и (32) отметим, что в силу (26) $\ln \Phi'(z) \prec \psi_0(z)$. Поэтому $|\arg \Phi'(z)| \equiv |Im\, \ln \Phi'(z)| \leq \max_{|z|\leq r^n} |Im\, \psi_0(z)|$. Следовательно, при $a = 1$ $|\arg \Phi'(z)| \leq \frac{|\delta| b}{n} r^n$, а при $a \neq 1$ $|\arg \Phi'(z)| \leq \frac{|\delta|}{n}\frac{b^2-(1-a)^2}{|1-a|}\max_{|z|\leq r^n}\left|\arg\left(1+\frac{1-a}{b}z\right)\right| = \frac{|\delta|}{n}\frac{b^2-(1-a)^2}{1-a}\arcsin\left(\frac{1-a}{b}r^n\right)$.

3-4.3 Свойства интегрального оператора (7)

Если $g(z) \in S_n^{0}(a,b)$, то в силу соотношения (4) $f(z) = zg'(z) \in S_n^*(a,b)$ и

$$G(z) = \int_0^z \left(g'(t)\right)^\delta dt = \int_0^z \left(\frac{f(t)}{t}\right)^\delta dt = \Phi(z)$$

Поэтому свойства оператора Бернацкого можно перенести на оператор $G(z) = I_\delta[g](z)$ заданный по формуле (7). Например, верна следующая теорема.

Теорема 4. *Пусть* $g(z) \in S_n^{0}(a,b)$. *Тогда интегральный оператор* $G(z)$

1) *является функцией, почти выпуклой порядка* $\gamma \geq \gamma_0$, *причем* γ_0 *определяется по формулам* (15)-(16);

2) *удовлетворяет оценкам* (29)-(32).

При $\delta = 1$ из (7) вытекает, что $G(z) = g(z)$. Поэтому, если $g(z) \in S_n^{0}(a,b)$, то по теореме 4 $g(z)$ будет удовлетворять оценкам (29)-(32), в которых вместо $\Phi'(z)$ надо записать $g'(z)$. В частности, для функций $g(z) \in S_\beta^{0}$ отсюда получим оценки

$$(1+r^n)^{\frac{2(\beta-1)}{n}} \leq |g'(z)| \leq (1-r^n)^{\frac{2(\beta-1)}{n}}, \qquad |\arg g'(z)| \leq \frac{2(1-\beta)}{n},$$

первая из которых для случая $n = 1$ приведены, например, в [15, с.56, теорема 2.3.5].

5 Выводы

В настоящей статье решена задача определения области значений вещественного показателя δ, входящего в интегральный оператор Бернацкого $\Phi(z) = \int_0^z (f(t)/t)^\delta dt$, при условии, что этот оператор отображает класс звездообразных функций Яновского, удовлетворяющих условию $\left|z\frac{f'(z)}{f(z)} - a\right| \leq b$, в класс функций, почти выпуклых порядка γ. В дополнение к основному результаты получены теорема искажения и теорема вращения для интеграла Бернацкого на классе звездообразных функций Яновского.

Список литературы

1 Авхадиев Ф.Г., Аксентьев Л.А. Основные результаты в достаточных условиях однолистности аналитических функций // УМН. – 1975. – Т. 30, вып. 4(184). – С. 3-60. https://www.mathnet.ru/links/e7c4d119db41755ee64c4677f4c40f9b/rm4232.pdf.

2 Singh R. (1963) On a class of star-like functions. *J. Indian Math. Soc.*, № 32, pp. 207-213.

3 Jakubowski Z.J. (1972) On the coefficients of star-like functions of some classes. *Ann. Polon. Math.*, № 26, pp. 305-313.

4 Silverman H., Silvia E.M. (1985) Subclasses of star-like functions subordinate to convex functions. *Can. J. Math.*, V. 37, № 1, pp. 48-61. doi: https://doi.org/10.4153/CJM-1985-004-7.

5 Ahmad F. (1985) Starlike integral operators. *Bull. Austral. Math. Soc.*, V. 32. pp. 217-224. doi: https://doi.org/10.1017/S0004972700009916.

6 Anh V.V., Tuan P.D. (1986) Extremal problems for a class of functions of positive real part and applications. *Austral. Math. Soc.*, Series A, № 41. pp. 152-164. https://doi.org/10.1017/S1446788700033577.

7 Reade M.O. (1956) The coefficients of close-to-convex functions. *Duke Math. J.*, V. 23, № 3, pp. 459-462. doi: 10.1215/S0012-7094-56-02342-0.

8 Renyi A. (1959) Some Remarks On Univalent Functions. *Ann. Univ. Mariae Curie-Sklodowska*, Sec. A.3, pp. 111-121. http://sci-gems.math.bas.bg:8080/jspui/bitstream/10525/2878/1/1959-111-121.pdf.

9 Merkes E.P., Wright D.J. (1971) On the univalence of a certain integral. *Proc. Amer. Math. Soc.*, V. 27, pp. 97-100. doi: 10.1090/S0002-9939-1971-0269825-1.

10 Прохоров Д.В. Интегральные преобразования в некоторых классах однолистных функций // Изв. вузов. Математика. – 1980. – №12. – С.45-49.

11 Кадиева М.Р., Майер Ф.Ф. Условие выпуклости обобщенного интеграла Бернацкого для одного подкласса звездообразных функций // Вестник КазНПУ им. Абая, серия «Физико-математические науки». – 2020. – Т. 69, №1. – С.110-118.

12 Майер Ф.Ф. Тастанов М.Г., Утемисова А.А. Геометрические свойства интегрального оператора Бернацкого // Журнал «Вестник ЮУрГУ», серия «Математика. Механика. Физика». – 2022. – Т. 14, №4 – С. 12-19. https://doi.org/10.14529/mmph220402.

13 Майер Ф.Ф. Построение достаточных признаков однолистности аналитических функций на основе метода подчиненности // Деп. в ВИНИТИ №5782-8223.11.82, 1982. – 21 с.

14 Suffridge T.J. (1970) Some remarks on convex maps of the unit disk. *Duke Math. J.*, № 37, pp. 755-777 . doi: https://doi.org/10.1215/S0012-7094-70-03792-0.

15 Kohr G., Graham I. Geometric function theory in one and higher dimensions. *New York: Marcel Dekker*, 2003, Inc. 56, 530 p. https://doi.org/10.1201/9780203911624.

МАЙЕР, Ф.Ф., ХАБДУЛЛИНА, Г.Ж.

ЯКУБОВСКИЙДІҢ ЖҰЛДЫЗ ТӘРІЗДІ ФУНКЦИЯЛАР КЛАСЫНДАҒЫ БЕРНАЦКИЙДІҢ ИНТЕГРАЛДЫ ОПЕРАТОРЫ

Геометриялық функциялардың теориясында әр түрлі интегралды операторларға интегралды түрлендіру кезінде тұрақты функциялардың берілген класының бейнесі анықталатын немесе осы операторға кіретін көрсеткіштердің мәндерінің ауқымы зерттелетін жұмыстардың үлкен циклі арналған, онда ол бір жапырақты функциялардың s класын (немесе оның ішкі сыныптарын) өзіне немесе басқа ішкі сыныптарға бейнелейді. Бұл мақалада нақты көрсеткіштің көптеген мәндері зерттеледі, онда бернацкийдің интегралды операторы $f(z) = z + a_{n+1}z^{n+1} + a_{n+2}z^{n+2} + \cdots, z \in E, n \geq 1,$ *түрінің ыдырауы бар Яновский функцияларының бірлік шеңберіндегі жұлдыздар класын көрсетеді және* $\left|z\frac{f'(z)}{f(z)} - a\right| \leq b$ *класы* $K(\gamma)$ *функциялары, дерлік дөңес ретті* γ*, немесе, атап айтқанда, сынып* S^0 *дөңес функциялар. Яновскийдің жұлдыз тәрізді функциялар класындағы Бернацкий интегралы үшін бұрмалау және айналу теоремалары да алынды. Мақаланың нәтижелері бұрын белгілі болған нәтижелерді қорытындылайды немесе күшейтеді.*

Түйінді сөздер: *бір жапырақты функциялар, бернацкийдің интегралды операторы, дөңес функциялар, жұлдыз тәрізді функциялар, дөңес функциялар.*

MAYER, F.F., KHABDULLINA, G.Zh.

BERNATSKIY INTEGRAL OPERATOR ON THE CLASS OF YAKUBOVSKIY STARLIKE FUNCTIONS

In the geometric theory of functions, a significant amount of papers is devoted to various integral operators. These studies define the image of a given class of regular functions under an integral transformation *or investigate the range of values for the parameters involved in the operator. These parameters determine whether the operator maps the class S of univalent functions (or its subclasses) onto itself or into other subclasses.*

In this article, we study the set of values of the real exponent, in which the Bernatskiy integral operator displays a class of starlike Yanovskiy functions in the unit circle having a decomposition of the form $f(z) = z + a_{n+1}z^{n+1} + a_{n+2}z^{n+2} + \cdots, z \in E, n \geq 1,$ *and satisfying the condition* $\left|z\frac{f'(z)}{f(z)} - a\right| \leq b$ *in the class* $K(\gamma)$ *of functions close-to-convex of order* γ*, or, in particular, in the class* S^0 *of convex functions. Distortion and rotation theorems for the Bernatskiy integral on the class of Yanovskiy starlike functions are also obtained. The results of the article summarize or enhance previously known results.*

Keywords: *univalent functions, Bernatskiy integral operator, convex functions, starlike functions, close-to convex functions.*

Сведения об авторах:

Майер Федор Федорович *– кандидат физико-математических наук, доцент, и.о. профессора кафедры математики и физики, Костанайский региональный университет имени Ахмет Байтұрсынұлы, г. Костанай, Республика Казахстан.*

Хабдуллина Гульнара Жумабековна *– магистр математики, старший преподаватель, кафедра математики и физики, Костанайский региональный университет имени Ахмет Байтұрсынұлы, г. Костанай, Республика Казахстан.*

Майер Федор Федорович *– физика-математика ғылымдарының кандидаты, доцент, математика және физика кафедрасы профессорының м.а., Ахмет Байтұрсынұлы атындағы Қостанай өңірлік университеті, Қостанай қ., Қазақстан Республикасы.*

Хабдуллина Гульнара Жумабековна *– математика магистрі, математика және физика кафедрасының аға оқытушы, Ахмет Байтұрсынұлы атындағы Қостанай өңірлік университеті, Қостанай қ., Қазақстан Республикасы.*

Mayer Fyodor Fyodorovich *– Candidate of Physical and Mathematical Sciences, acting Professor of the Department of Mathematics and Physics, Akhmet Baitursynuly Kostanay Regional University, Kostanay, Republic of Kazakhstan.*

Khabdullina Gulnara Zhumabekovna *– Master of Mathematics, Senior Lecturer of the Department of Mathematics and Physics, Akhmet Baitursynuly Kostanay Regional University, Kostanay, Republic of Kazakhstan.*

УДК 519.245

Тастанов, М.Г.,
кандидат физико-математических наук,
и.о. профессора кафедры математики и физики,
КРУ имени Ахмет Байтұрсынұлы,
г. Костанай, Республика Казахстан
Жарлыгасова, Э.З.,
магистр естественных наук,
старший преподаватель
кафедры математики и физики,
КРУ имени Ахмет Байтұрсынұлы,
г. Костанай, Республика Казахстан

СЛУЧАЙНЫЕ ПРОЦЕССЫ

Аннотация

Теорией случайных процессов называется раздел математики, который изучает закономерности случайных явлений в динамике их развития. При

МАЗМҰНЫ

ГУМАНИТАРЛЫҚ ЖӘНЕ ӨНЕР ҒЫЛЫМДАРЫ

Безаубекова А.Д., Мәліксада А.М., Айтқазы Ә.А. М. Мақатаев «Аққулар ұйықтағанда» поэмасы 3
Бекбосынова А.Х., Бекмагамбетова М.Ж., Бейбітова Н.Б. Сайын Мұратбеков «Жусан иісі» повесіндегі – Аян бейнесі 10
Бекбосынова А.Х., Бекмагамбетова М.Ж., Дуйсенбаева К.Е. Бердібек Соқпақбаевтың «Балалық шаққа саяхат» повесіндегі «балалық шақ» концептісі 18
Бекбосынова А.Х., Бекмагамбетова М.Ж., Есенгельды Э.Қ. Бердібек Соқпақбаевтың «Ана жүрегі» шығармасындағы бала тағдыры 23
Исова Э.А., Азимхан Д.А. Дулат Исабековтың «Ескерткіш» әңгімесінің көркемдік ерекшеліктері........ 28
Исова Э.А., Атығай Ш.С. Қошке Кемеңгерұлының педагогикалық мұрасы: тіл тазалығы және білім беру әдістемесі 33
Исова Э.А., Шахметова М.А. І. Жансүгіровтің «Қолбала» поэмасының көркемдік ерекшеліктері........ 39

ЖАРАТЫЛЫСТАНУ ҒЫЛЫМДАРЫ

Брагина Т.М., Приезжих Ю.В. Қостанай облысындағы қарағайдың сабақты зиянкестері – ұзын мүйізді қоңыздарға шолу (coleoptera, cerambicadae)........ 44
Майер Ф.Ф. Яновский класының негізінде құрылған жұлдыз тәрізді функциялардың кейбір кластары туралы 50
Майер Ф.Ф., Хабдуллина Г.Ж. Якубовскийдің жұлдыз тәрізді функциялар класындағы Бернацкийдің интегралды операторы 56
Тастанов М.Г., Жарлыгасова Э.З. Кездейсоқ процесстер 64
Тастанов М.Ғ., Нургельдина А.Е. Монте-Карло әдістерінің жалпы схемасы........ 74

ИНЖИНИРИНГ ЖӘНЕ ТЕХНОЛОГИЯ

Амантаев М.А., Абитов Т.А., Азбергенов Е.Т., Красильников Я.С. Дөңгелек қозғалысын кинематикалық модельдеу 87
Балтабекова И.Ж., Жунусова Г.С., Саидов А.М., Калитка Д.А. Матча шай қосылған ашытқы нан өндірісінің болашағы 92
Кравченко Р.И., Золотухин Е.А., Амантаев М.А., Караев А.К. Жеңіл автомобиль қозғалтқышын теңестіру әдісін әзірлеу 98
Нам Д. Генеративті адверсарлық желілерді (gan) өкпе обырының КТ суреттерін генерациялау үшін қолдану 105
Семибаламут А.В., Золотухин Е.А., Медиткали И.Е., Кушибаева Д.Р. Әртүрлі серпімділік қасиеттері бар серпімді элементтер негізінде суспензияның серпімділік сипаттамаларын бағалау........ 113

АУЫЛ ШАРУАШЫЛЫҒЫ ЖӘНЕ ВЕТЕРИНАРИЯ ҒЫЛЫМДАРЫ

Бейшов Р.С., Алитанова М.К. Жаздық бидай мен арпаның ауруларға төзімділігіне әртүрлі қорғаныш және ынталандыру қосылыстардың әсері........ 121
Бейшов Р.С., Барсакбаева М.Б. Қостанай қаласының жанармай құю станцияларында мұнай өнімдерімен ластанған топырақ микрофлорасының биоремедиациялық қалпына келтіру әлеуетін практикалық тұрғыда зерттеу 127
Бейшов Р.С., Смаилова А.И. Топырақтың ауыр металдармен ластануы және олардың өсімдіктерге әсерін зерттеу........ 136
Саидов А.М. Цифрландыру жағдайында АӨК мамандарының кәсіби құзыреттілігін дамыту: цифрлық платформа тұжырымдамасы........ 143

ӘЛЕУМЕТТІК ҒЫЛЫМДАР

Абылай П.С. «Математикалық логика» пәнін болашақ педагогтерге оқытудың маңыздылығы және мазмұндық ерекшеліктері 151
Саидов А.М., Раисова Ж.Х. Білім беру процесін трансформациялаудағы инновациялық технологиялар мен цифрландырудың рөлі.. 155
Шалгимбекова К.С., Айтмағамбетов Е.Ж. Колледж оқушыларының кәсіби өзін-өзі айқындауының мәні мен ерекшеліктері 162
Шалгимбекова К.С., Шупотаев С.М. Мектеп оқушыларының қазіргі білім беру жағдайындағы ерік қасиеттері және оның сипаттары.. 168

АВТОРЛАРДЫҢ НАЗАРЫНА 174

СОДЕРЖАНИЕ

ГУМАНИТАРНЫЕ НАУКИ И ИСКУССТВО

Безаубекова А.Д., Маликзада А.М., Айтказы А.А. Поэма М. Макатаева «Когда спят лебеди» ... 3

Бекбосынова А.Х., Бекмагамбетова М.Ж., Бейбітова Н.Б. Образ Аяна в повести Сайына Муратбекова «Запах полыни» ... 10

Бекбосынова А.Х., Бекмагамбетова М.Ж., Дуйсенбаева К.Е. Концепция «детство» в повести Бердибека Сокпакбаева «Путешествие в детство» ... 18

Бекбосынова А.Х., Бекмагамбетова М.Ж., Есенгельды Э.Қ. Судьба ребенка в произведении Бердибека Сокпакбаева «Материнское сердце» ... 23

Исова Э.А., Азимхан Д.А. Художественные особенности рассказа Дулата Исабекова «Ескерткіш» ... 28

Исова Э.А., Атығай Ш.С. Педагогическое наследие Кошке Кеменгерулы: чистота языка и методика образования ... 33

Исова Э.А., Шахметова М.А. Художественные особенности поэмы И. Жансугурова «Қолбала» ... 39

ЕСТЕСТВЕННЫЕ НАУКИ

Брагина Т.М., Приезжих Ю.В. Обзор жуков усачей (coleoptera, cerambicadae) – стволовых вредителей сосны в Костанайской области ... 44

Майер Ф.Ф. О некоторых классах почти звездообразных функций, построенных на базе класса Яновского ... 50

Майер Ф.Ф., Хабдуллина Г.Ж. Интегральный оператор Бернацкого на классе звездообразных функций Якубовского ... 56

Тастанов М.Г., Жарлыгасова Э.З. Случайные процессы ... 64

Тастанов М.Г., Нургельдина А.Е. Общая схема методов Монте-Карло ... 74

ИНЖИНИРИНГ И ТЕХНОЛОГИИ

Амантаев М.А., Абитов Т.А., Азбергенов Е.Т., Красильников Я.С. Кинематическое моделирование движения колеса ... 87

Балтабекова И.Ж., Жунусова Г.С., Саидов А.М., Калитка Д.А. Перспективы производства хлеба на закваске с добавлением матча чая ... 92

Кравченко Р.И., Золотухин Е.А., Амантаев М.А., Караев А.К. Разработка способа балансировки движителя легкового автомобиля ... 98

Нам Д. Применение моделей ганов для генерации КТ снимков рака легкого ... 105

Семибаламут А.В., Золотухин Е.А., Медиткали И.Е., Кушибаева Д.Р. Оценка упругой характеристики подвески на основе эластичных элементов с различными упругими свойствами ... 113

СЕЛЬСКОХОЗЯЙСТВЕННЫЕ, ВЕТЕРИНАРНЫЕ НАУКИ

Бейшов Р.С., Алитанова М.К. Влияние защитно-стимулирующих составов на устойчивость к болезням яровой пшеницы и ячменя ... 121

Бейшов Р.С., Барсакбаева М.Б. Практическое исследование биоремедиационного восстановительного потенциала почвенной микрофлоры, загрязненной нефтепродуктами, на автозаправочных станциях г. Костанай ... 127

Бейшов Р.С., Смаилова А.И. Исследование загрязнение почвы тяжелыми металлами и их воздействие на растения ... 136

Саидов А.М. Развитие профессиональных компетенций специалистов АПК в условиях цифровизации: концепция цифровой платформы ... 143

СОЦИАЛЬНЫЕ НАУКИ

Абылай П.С. Важность и содержательные особенности преподавания предмета «математическая логика» будущим педагогам 151
Саидов А.М., Раисова Ж.Х. Роль инновационных технологий и цифровизации в трансформации образовательного процесса 155
Шалгимбекова К.С., Айтмагамбетов Е.Ж. Сущность и особенности профессионального самоопределения учащихся колледжа 162
Шалгимбекова К.С., Шупотаев С.М. Волевые качества школьников и их особенности в современных образовательных условиях 168

ИНФОРМАЦИЯ ДЛЯ АВТОРОВ 177

CONTENT

HUMANITIES AND ARTS

Bezaubekova A.D., Malikzada A.M., Aitkazy A.A. M. Makatayev's poem «When swans sleep» 3
Bekbossynova A.Kh., Bekmagambetova M.Zh., Beibitova N.B. The character of Ayan in Saiyn Muratbekov's story «The Scent of the Wormwood» 10
Bekbossynova A.Kh., Bekmagambetova M.Zh., Duissenbayeva K.Y. The concept of childhood in Berdibek Sokpakbayev's novel «Journey to Childhood» 18
Bekbossynova A.Kh., Bekmagambetova M.Zh., Yessengeldy E.K. The fate of a child in Berdibek Sokpakbayev's novel «A Mother's Heart» 23
Isova E.A., Azimkhan D.A. Artistic features of Dulat Issabekov's story «Yeskertkish» 28
Isova E.A., Atygay Sh.S. Koshke Kemengeruly's pedagogical heritage: language purity and teaching methodology 33
Isova E.A., Shakhmetova M.A. Artistic features of I. Zhansugurov's poem «Kolbala» 39

NATURAL SCIENCES

Bragina T. M., Priezzhikh, Yu.V. Review of longicorn beetles (coleoptera, cerambicadae) – stem pests of pine in Kostanay region 44
Mayer F.F. On some classes of close-to-starlike functions based on the Yanovskiy class 50
Mayer F.F., Khabdullina G.Zh. Bernatskiy integral operator on the class of Yakubovskiy starlike functions 56
Tastanov M.G., Zharlygassova E.Z. Random processes 64
Tastanov M.G., Nurgeldina A.Y. Monte Carlo methods design scheme 74

ENGINEERING AND TECHNOLOGY

Amantayev M.A., Abitov T.A., Azbergenov Y.T., Krasilnikov Ya.S. Kinematic modelling of wheel movement 87
Baltabekova I.Zh., Zhunussova G.S., Saidov A.M, Kalitka D.A. Prospects of matcha sourdough bread production 92
Kravchenko R.I., Zolotukhin Y.A., Amantayev M.A., Karayev A.K. Development of a method for balancing a passenger car propeller unit 98
Nam D. Application of generative adversarial neural networks for lung cancer CT image segmentation 105
Semibalamut A.V., Zolotukhin Y.A., Meditkali I.Y., Kushibayeva D.R. Evaluation of the elastic characteristics of a suspension based on elastic elements with different elastic properties 113

AGRICULTURAL, VETERINARY SCIENCES

Beishov R.S., Alitanova M.K. The effect of protective and stimulating compounds on disease resistance of spring wheat and barley 121
Beishov R.S., Barsakbayeva M.B. Empirical research of bioremediation recovery potential of soil microflora contaminated with oil products at gas stations in Kostanay 127
Beishov R.S., Smailova A.I. Research of soil pollution by heavy metals and their effects on plants 136
Saidov A.M. Development of professional competences of agro-industrial specialists in the context of digitalization: the concept of a digital platform 143

SOCIAL SCIENCES

Abylay P.S. The importance and key content-specific features of teaching the subject "mathematical logic" to future educators 151
Saidov A.M., Raissova Zh.Kh. The role of innovative technologies and digitalization in the educational process transformation 155

Shalgimbekova K.S., Aitmagambetov Y.Z. The essence and features of professional self-determination of college students 162
Shalgimbekova K.S., Shalgimbekova K.S. Volitional qualities of schoolchildren and their characteristics in modern educational conditions 168

INFORMATION FOR AUTHORS 180

Редактор, корректор: *А. Симонова*
Корректорлар: *Б. Сыздыкова, Т. Цай*
Компьютерлік беттеу: *С. Красикова*

Редактор, корректор: *А. Симонова*
Корректоры: *Б. Сыздыкова, Т. Цай*
Компьютерная верстка: *С. Красикова*

Басуға 15.01.2025 ж. берілді.
Пішімі 60х84/8. Көлемі 14,1 б.т.
Тапсырыс № 003

Ахмте Байтұрсынұлы атындағы
Қостанай өңірлік университетіндегі
редакциялық-баспа бөлімінде басылған
Қостанай қ., Байтұрсынов к., 47

Подписано в печать 15.01.2025 г.
Формат 60х84/8. Объем 14,1 п.л.
Заказ № 003

Отпечатано в редакционно-издательском отделе
Костанайского регионального университета
имени Ахмет Байтұрсынұлы
г. Костанай, ул. Байтурсынова, 47