BU

BAITURSYNULY
UNIVERSITY

«АХМЕТ БАЙТҰРСЫНҰЛЫ АТЫНДАҒЫ ҚОСТАНАЙ ӨҢІРЛІК УНИВЕРСИТЕТІ» КЕАҚ

ҚМПИ ЖАРШЫСЫ

КӨПСАЛАЛЫ ҒЫЛЫМИ ЖУРНАЛЫ
МНОГОПРОФИЛЬНЫЙ НАУЧНЫЙ ЖУРНАЛ

ISSN 2310-3353

№ 2
2025

PUBLISHINGS KSPI | **ҚМПИ ЖАРШЫСЫ** | **ВЕСТНИК КГПИ**

BU BAITURSYNULY UNIVERSITY

2025 ж., сәуір, №2 (78)
Журнал 2005 ж. қаңтардан бастап шығады
Жылына төрт рет шығады

Құрылтайшы: ***Ахмет Байтұрсынұлы атындағы Қостанай өңірлік университеті***

Тіркеу туралы куәлік №5452-Ж
Қазақстан Республикасының ақпарат министрлігімен 17.09.2004 берілген.
Мерзімді баспа басылымын қайта есепке алу 07.11.2023 ж.
Жазылу бойынша индексі 74081

Редакцияның мекен-жайы:
110000, Қостанай қ., Байтұрсынов к., 47
(Редакциялық-баспа бөлімі)
Тел.: 8(7142) 51-11-76

КӨПСАЛАЛЫ ҒЫЛЫМИ ЖУРНАЛЫ **№ 2 (78) 2024** **МНОГОПРОФИЛЬНЫЙ НАУЧНЫЙ ЖУРНАЛ**

№2 (78), апрель 2025 г.
Издается с января 2005 года
Выходит 4 раза в год

Учредитель: ***Костанайский региональный университет имени Ахмет Байтұрсынұлы***

Свидетельство о регистрации № 5452-Ж
выдано Министерством информации Республики Казахстан 17.09.2004 г.
Переучёт периодического печатного издания 07.11.2023 г.
Подписной индекс 74081

Адрес редакции:
110000, г. Костанай, ул. Байтурсынова, 47
(Редакционно-издательский отдел)
Тел.: 8(7142) 51-11-76

Zharlygassova Elmira Zakirovna – *Master of Natural Sciences, Senior Lecturer of the Department of mathematics and physics, Akhmet Baitursynuly Kostanay Regional University, Kostanay, Republic of Kazakhstan.*

УДК 519.245

Тастанов, М.Г.,
кандидат физико-математических наук,
и.о. профессора кафедры математики и физики,
КРУ имени Ахмет Байтұрсынұлы,
г. Костанай, Республика Казахстан
Нургельдина, А.Е.,
магистр естественных наук, старший преподаватель
кафедры математики и физики,
КРУ имени Ахмет Байтұрсынұлы,
г. Костанай, Республика Казахстан

СХЕМА МЕТОДОВ МОНТЕ-КАРЛО

Аннотация

При использовании метода Монте-Карло моделируются случайные величины с известными законами распределения, и из этих величин по известным правилам конструируются более сложные, распределение которых уже не может быть найдено аналитически. Эти результирующие распределения могут быть известны с точностью до параметров – в этом случае используется аппарат математической статистики для оценивания этих параметров. В случае, когда вид результирующего распределения неизвестен, используются непараметрические методы.

Ключевые слова: *методы Монте-Карло, способы задания случайной величины, интеграла типа Лебега, модификации методов Монте-Карло, процесс «блуждания по сферам».*

1 Введение

Моделирование более сложного случайного процесса при помощи известной простой случайной величины является основным содержанием методов Монте-Карло. Одной из самой простой случайной величиной может служить случайная величина, равномерно распределенная на промежутке [0,1]. Известно много способов построения, с любой заданной точностью, (хотя бы бросанием монеты) случайной величины равномерно распределенной на [0,1]. Подобный способ задания случайной величины называют конструктивным. Тогда, естественно требовать, чтобы рассматриваемые вероятностные пространства тоже были конструктивными. Под конструктивным вероятностным пространством будем понимать такое вероятностное пространство (Ω, U, P), для которого существует измеримое отображение $\omega = \phi(x)$, $x \in [0,1]$, $\omega \in \Omega$, отрезка [0,1] в Ω такое, что для любого $A \in U$ $\mu\{A\} = \int_B dx$, где $B = \{x: \phi(x) \in A\}$ [1]. Таким образом, требование конструктивности вероятностного пространства означает, что случайная величина, определенная на нем, должна выражаться через равномерно распределенные на [0,1] случайные величины. Последние же, как отмечалось, могут быть заданы конструктивно.

2 Материалы и методы

При конструктивном задании случайные величины являются функциями указанных совокупностей равномерно распределенных случайных величин, а математические ожидания функционалов от процессов являются интегралами по единичному гиперкубу счетной кратности. Если вернуться к задаче моделирования равномерно распределенной случайной величины, то мы увидим, что последовательность $\alpha_1, \alpha_2, \ldots$, независимых реализаций величины должна обладать, по меньшей мере, тем свойством, что для случайных величин, конструируемых с ее помощью, должен иметь место усиленный закон больших чисел. Это означает, что при любом конечном S для любой интегрируемой функции $f_S(x_1, \ldots, x_n)$ должны выполняться соотношения

$$\lim_{N\to\infty} \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} f_S(\alpha_{iS}, \alpha_{i(S+1)}, \ldots, \alpha_{(i+1)S-1}) = \int_0^1 \ldots \int_0^1 f_S(x_1, \ldots, x_S) dx_1 \ldots dx_S.$$

Последовательности, для которых выполняются данное соотношение, изучаются в теории чисел. Мы этот раздел методов Монте-Карло рассматривать не будем.

Методы построения отображения $\omega = \phi(x)$, т.е. методы, с помощью которых реализации случайных величин с различными законами распределения выражаются через реализации $\alpha \in [0,1]$, во многих конкретных случаях могут быть достаточно сложными в вычислительном отношении [2].

Задача методов Монте-Карло после получения ряда реализаций интересующей нас случайной величины ξ заключается в получении некоторых сведений о ее распределении, т.е. является типичной задачей математической статистики. При этом наиболее распространенной вычислительной задачей является задача оценки среднего значения некоторой случайной величины, т.е. задача вычисления интеграла типа Лебега по некоторой конструктивной вероятностной мере. Последняя может иметь весьма сложную природу и задаваться как композиция более простых мер.

3–4 Результаты и обсуждение

Наиболее изучен случай, когда существует конечный второй момент случайной величины. Наиболее простая вычислительная схема при этом заключается в следующем. Вычисляется N независимых реализаций случайной величины, и ее математическое ожидание оценивается с помощью среднего арифметического этих реализаций. Основанием служит тот факт, что среди линейных несмещенных оценок среднее арифметическое имеет наименьшую дисперсию. Оценка погрешности может быть получена с помощью неравенства Чебышева и имеет вероятностный характер.

Для фиксированной достаточно малой величины $\gamma = \sigma^2/(N\varepsilon^2)$ получим

$$P\left\{\left|\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}\xi_i - M\xi\right| < \frac{\sigma}{(N\gamma)^{1/2}}\right\} > 1 - \gamma, \quad (1)$$

(смотри неравенство Чебышева, [3]).

где $\xi_1, \ldots, \xi_n -$ независимые и одинаково распределенные случайные величины, $M\xi_k = a < \infty, D\xi_k = \sigma^2 < \infty\ (k = 1, \ldots, n)$. Из неравенства (1) следует, что с вероятностью $1-\gamma$ среднее арифметическое независимых реализаций ξ отличается от $M\xi = a$ не более, чем на $\varepsilon = \sigma/\sqrt{N\gamma}$. При фиксированных γ и σ погрешность убывает, таким образом, как $N^{-1/2}$.

Если для оценки погрешности используется центральная предельная теорема, то при достаточно большом N величину $\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}\xi_i$ можно считать распределенной приблизительно нормально со средним $M\xi$ и дисперсией σ^2/N, что дает возможность построить доверительный интервал и оценить погрешность. При этом, необходимо, чтобы распределение величины $\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}\xi_i$ отличалось от нормального не более, чем на величину порядка $N^{-1/2}$. Дисперсия, которая определяет погрешность, может быть также оценена в процессе вычислений. Таким образом, имеется возможность определить в процессе вычислений число N, гарантирующее необходимую точность с заданной вероятностью (надежностью). Таким образом, эта задача тесно связана с задачей оценки параметров нормального распределения. При этом оценка математического ожидания дает решение задачи, а оценка дисперсии обеспечивает оценку погрешности. Хотя порядок убывания погрешности $O(N^{-1/2})$ недостаточно высокий для точных вычислений, имеются различные способы преобразования случайных величин, сохраняющие их среднее значение, но изменяющие дисперсию в меньшую сторону. Такая возможность преобразования случайных величин вытекает из равенства

$$M\xi = \int \xi(\omega)P(d\omega) = \int \xi(\omega)\frac{dP}{d\mu}(\omega)\mu(d\omega),$$

где $\mu >> P$. Это представление даст возможность вычислять вместо среднего значения ξ по мере P среднее значение $\xi\frac{dP}{d\mu}$ по мере μ. Если

$$D\xi = \int \xi^2(\omega)P(d\omega) - (M\xi)^2, \text{ то}$$

$$D\left(\xi\frac{dP}{d\mu}\right) = \int \left(\xi\frac{dP}{d\mu}\right)^2 \mu(d\omega) - (M\xi)^2,$$

и, вообще, $D\xi \neq D\left(\xi\frac{dP}{d\mu}\right)$.

С вычислительной точки зрения, недостаточно выбрать μ таким образом, чтобы $D\left(\xi\frac{dP}{d\mu}\right)$ была меньше, чем $D\xi$, так как моделирование случайной величины $\xi\frac{dP}{d\mu}$ может оказаться значительно сложнее, чем моделирование исходной. Поэтому используют преобразования, уменьшающие вычислительную работу, необходимую для достижения заданной точности при данной надежности.

Преобразования, сохраняющие математическое ожидание случайной величины, но изменяющие ее дисперсию, называют модификациями методов Монте-Карло [4].

В последнее время интенсивно разрабатываются методы Монте-Карло для приближенного решения краевых задач. Для решения краевых задач можно выделить три подхода к построению методов Монте-Карло.

1) Дискретизация дифференциального уравнения разностным, и полученную систему линейных алгебраических уравнений решить моделированием дискретных цепей Маркова с конечным числом состояний. Последняя вычислительная схема была впервые предложена Дж. фон Нейманом и Уламом. В этом случае однородная цепь Маркова с n состояниями $\{p, \wp\}$ рассматривается в дискретные моменты времени, где $p = (p_1, p_2, \ldots, p_n)$ – распределение вероятностей начальных состояний, а $\wp = \{p_{i,j}\}_{i,j=1}^{n}$ – переходная стохастическая матрица. Для элементов матрицы $\wp$ выполняется соотношения $\sum_{j=1}^{n} p_{i,j} = 1, i = 1, \ldots, n$, $p_{i,j} \geq 0, i, j = 1, \ldots, n$, так что ее строка с номером i представляет собой распределение вероятностей.

2) Представление решения в виде континуального интеграла и вычисление его методом Монте-Карло. Точнее, приближенное интегрирование континуального интеграла в функциональных пространствах можно осуществить по гауссовым мерам или можно оценивать по мере Винера методом Монте-Карло, основываясь на кусочно-линейные аппроксимации винеровского процесса или с помощью других приближенных формул разложения меры.

3) Сведение исходной дифференциальной задачи к специальному интегральному уравнению и решение этого интегрального уравнения методами Монте-Карло. В этом случае широко используется математический аппарат преобразования уравнений математической физики.

Во всех этих подходах решение $u(x)$ записывается в виде математического ожидания некоторой случайной величины $\xi(x)$ такой, что $u(x) = M\xi(x)$ [5]. Пусть $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_N$ – независимые реализации случайной величины $\xi(x)$. Тогда в силу закона больших чисел среднее $\bar{\xi} = (\xi_1 + \xi_2 + \ldots + \xi_N)/N$ при $N \to \infty$ сходится с вероятностью 1 к $u(x)$. Центральная предельная теорема позволяет оценить доверительный интервал для $u(x)$, если $D\xi(x) < \infty$.

Различие трех приведенных подходов состоит в выборе случайного процесса, на траектории которого строится оценка $\xi(x)$. В первом варианте – это случайные блуждания по узлам сетки, во втором – диффузионный процесс, естественным образом связанный с дифференциальным оператором, в третьем – специальный марковский процесс с дискретным временем. Первый подход является наиболее универсальным и приводит к простым численным алгоритмам, которые, однако, в ряде случаев оказываются значительно более трудоемкими, чем алгоритмы, основанные на других подходах. Поэтому представляется интерес разработка других различных вероятностных моделей, связанных с дифференциальными уравнениями, в частности развитие подхода 3).

Трудоемкость статистических алгоритмов определяется произведением среднего времени расчетов, необходимого для реализации одного значения оценки, на ε^{-2}, где $\varepsilon -$ требуемая погрешность вычислений. Объем вычислений в схеме 1 имеет порядок ε^{-3}. Надо отметить, что последний подход позволяет одновременно вычислять и производные от решения, важно для многих практических задач.

Процесс «блуждания по сферам». Вероятностные представления решений некоторых краевых задач винеровскими интегралами дают возможность оценивать такие решения путем моделирования винеровского процесса на ЭВМ. Однако строить винеровские траектории можно только приближенно, например, заменяя их кусочно-линейными траекториями. При достаточно широких предположениях относительно осредняемого функционала трудоемкость алгоритма, основанного на кусочно-линейной аппроксимации процесса, определяется величиной ε^{-3}, где $\varepsilon -$ требуемая погрешность в оценке решения. Эта оценка трудоемкости связана с необходимостью построения узловых значений траекторий с шагом $\Delta t \sim \varepsilon$ [6].

Специфика винеровских интегралов, выражающих решения краевых задач, иногда позволяет для их оценки строить траекторию процесса менее подробно. Например, при оценке решения задачи Дирихле для уравнения Лапласа с помощью представления

$$u(P) = M[\phi(\xi_P(\tau))],$$

достаточно моделировать выход винеровского процесса $\xi_P(t)$ на границу данной области. Это можно делать приближенно, моделируя последовательно выход траектории из максимальных сфер, целиком лежащих внутри области, причем центром очередной сферы является предыдущая точка выхода. При некоторых предположениях трудоемкость такого алгоритма определяется величиной $c|ln\,\varepsilon|/\varepsilon^2$, т.е. асимптотически существенно меньше трудоемкости алгоритма, основанного на кусочно-линейной аппроксимации винеровского процесса. Из сказанного ясно, что вероятностное решение некоторых краевых задач можно связать с цепью Маркова, которую мы будем называть «блужданием по сферам» (иначе ее называют также «сферическим процессом») [7].

На первый взгляд кажется, что вероятностное решение краевых задач для уравнения эллиптического типа нельзя построить, пользуясь только «блужданием по сферам», так как вероятностное представление решения зависит от поведения винеровской траектории внутри сфер. Однако это все-таки оказалось возможным благодаря использованию «частичного осреднения» и специальных интегральных уравнений второго рода. Поэтому в данной статье рассматривается непосредственно процесс «блуждания по сферам», который значительно проще винеровского.

Определение и простейшие свойства «блуждания по сферам».

Введем следующие обозначения:

$\Omega' -$ замыкание области Ω;

$d(P) -$ расстояние от точки P до границы $\partial\Omega$ области Ω;

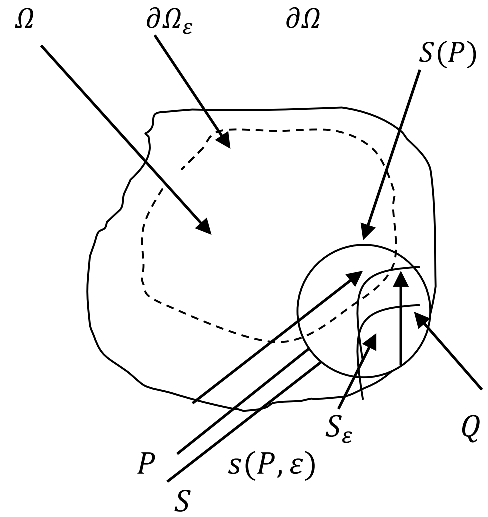
$\partial\Omega_\varepsilon - \ \varepsilon -$ окрестность границы $\partial\Omega$; $\partial\Omega_\varepsilon = \{P \in \Omega';\ d(P) < \varepsilon\}$;

$S(P) = \{Q \in \Omega' : |Q - P| = d(P)\} -$ максимальная из сфер с центром в точке P, целиком лежащих в Ω'.

В процессе «блуждания по сферам» очередная точка P_{k+1} выбирается равномерно по поверхности сферы $S(P_k)$; процесс обрывается, если точка попадает в $\partial\Omega_\varepsilon$ [8].

Обозначим через $s(P,\varepsilon) -$ поверхность той части сферы $S(P)$, которая принадлежит множеству $\partial\Omega_\varepsilon$. Проведем сферу S_ε радиуса ε с центром в точке Q касания границы $\partial\Omega$ сферой $S(P)$. Тогда площадь части сферы $S(P)$, целиком лежащей внутри S_ε, равна $\pi\varepsilon^2$. Отсюда получаем следующую оценку снизу для вероятности попадания очередной точки в $\partial\Omega_\varepsilon$:

$$\frac{s(P.\varepsilon)}{4\pi d^2(P)} \geq \frac{\pi\varepsilon^2}{\pi d^2(P)} \geq \frac{\varepsilon^2}{4d_{max}^2} \quad (2)$$



где d_{max} точная верхняя граница радиусов сфер, целиком лежащих в Ω. Дадим теперь точное определение процесса «блуждания по сферам». Зададим цепь Маркова $\{P_n\}$ следующими характеристиками: $\pi(r) = \delta(r - P_0) -$ плотность начального распределения (т.е.цепь «выходит» из точки P_0); $p(\mathrm{r},\mathrm{r}') = \delta_r(r') -$ плотность перехода из r в r', представляющая собой обобщенную трехмерную плотность равномерного распределения вероятностей на сфере $S(r)$; $p(r) -$ вероятность обрыва цепи, определяемая выражением:

$$p(r) = \begin{cases} 0, \mathrm{r} \notin \Gamma_\varepsilon, \\ 1, \mathrm{r} \in \Gamma_\varepsilon. \end{cases}$$

Как уже было указано, эта цепь называется «блужданием по сферам». Ее можно, очевидно, записать следующим образом:

$P_n = P_{n-1} + \vec{\omega}_n d(P_{n-1}), n = 1,2,\ldots,$ где $\vec{\omega}_n -$ последовательность независимых изотропных векторов единичной длины. Нетрудно заметить, что вероятность $p(r)$ обрыва цепи после очередного перехода равна вероятности непосредственного попадания из точки r в $\partial\Omega_\varepsilon$ и удовлетворяет неравенству $p(r) \geq \nu(\varepsilon)$. Отсюда находим, что среднее число переходов $q(P_0, \varepsilon)$, определяющее среднее время расчетов на ЭВМ, не превосходит $\nu^{-1}(\varepsilon)$.

5 Выводы

Известно, что траектория «блуждания по сферам» с вероятностью 1 сходится к границе области. Следовательно, для получения более точной оценки $q(P_0, \varepsilon)$ можно использовать оценки плотности $f(r)$ распределения среднего числа центров сфер $S(P_k)$ вблизи границы. Обозначим через x расстояние до границы. Соображения подобия показывают, что плотность $f(x)$ распределения среднего числа центров сфер по x с точностью до постоянного множителя должна быть близкой к x^{-1}. Отсюда вытекает соотношение $q(P_0, \varepsilon) \leq c|ln\,\varepsilon|$, которому мы придадим более точный смысл на основе теории восстановления, изучающей свойства последовательностей сумм независимых случайных величин [9].

Список литературы

1 Ермаков С.М. Метод Монте-Карло и смежные вопросы. – М.: Наука.2015. – 492 с.

2 Ермаков С.М., Михайлов Г.А. Курс статистического моделирования. – М.: Наука. 1982. – 247 с.

3 Крамер Г. Математические методы статистики. – М.: Мир. 1975.

4 Гмурман В.Е. Теория вероятности и математическая статистика. – М.: Высшая школа, изд. Четвертое доп. 2011. – 217 с.

5 Соболь И.М. Численные методы Монте-Карло. – М.: Наука. 1973.
6 Бусленко Н.П., Голенко Д.И., Соболь И.М., Срагович В.Г., Шрейдер Ю.А. Метод стохастических испытаний (метод Монте-Карло). – М.: ГИФЛ, 1962. – 226 с.
7 Раменская А.В. Метод Монте-Карло и инструментальные средства его реализации: методические указания / А.В. Раменская, К.В. Пивоварова. Оренбургский гос. Университет – Оренбург: ОГУ, 2018. – 58 с.
8 Бусленко Н.П., Шрейдер Ю.А. Метод стохастических испытаний Монте-Карло и его реализация в цифровых машинах. – Физматгиз, изд. Третье доп. 2012. – 301 с.
9 Михайлов Г.А. Оптимизация взвешенных методов Монте-Карло. – М. Наука,1987. – 239 с.

ТАСТАНОВ, М.Г., НУРГЕЛЬДИНА, А.Е.
МОНТЕ-КАРЛО ӘДІСТЕРІНІҢ СХЕМАСЫ

Монте-Карло әдісін қолданған кезде белгілі таралу заңдары бар кездейсоқ шамалар модельденеді және осы шамалардан белгілі ережелерге сәйкес анағұрлым күрделі мәндер құрылады, олардың таралуын енді аналитикалық түрде табу мүмкін емес. Бұл алынған үлестірімдерді параметрлердің дәлдігімен білуге болады – мұндай жағдайда бұл параметрлерді бағалау үшін математикалық статистика аппараты қолданылады. Алынған үлестірімнің түрі белгісіз болған жағдайда параметрлік емес әдістер қолданылады.

Түйінді сөздер: *Монте-Карло әдістері, кездейсоқ шаманы, лебег типті интегралды анықтау әдістері, Монте-Карло әдістерін өзгерту, «сфераларды кезу» процесі.*

TASTANOV, M.G., NURGELDINA, A.Y.
MONTE-CARLO METHODS SCHEME

When using the Monte Carlo method, random variables with known distribution laws are modeled, and ones that are more complex are constructed from these quantities according to known rules, the distribution of which can no longer be found analytically. These resulting distributions can be calculated to an accuracy of the parameters – in this case, the apparatus of mathematical statistics is used to estimate these parameters. In the case when the type of the resulting distribution is unknown, nonparametric methods are used.

Key words: *Monte-Carlo methods, methods of defining a random variable, Lebesgue integral, modifications of Monte-Carlo methods, the process of «floating random walk».*

Сведения об авторах:

Тастанов Мейрамбек Габдуалиевич *– кандидат физико-математических наук, доцент, и.о профессора кафедры математики и физики, Костанайский региональный университет имени Ахмет Байтұрсынұлы, г. Костанай, Республика Казахстан.*

Нургельдина Асель Ермековна *– магистр естественных наук, старший преподаватель кафедры математики и физики, Костанайский региональный университет имени Ахмет Байтұрсынұлы, г. Костанай, Республика Казахстан.*

Тастанов Мейрамбек Ғабдуалиұлы *– физика-математика ғылымдарының кандидаты, доцент, математика және физика кафедрасы профессорының м.а., Ахмет Байтұрсынұлы атындағы Қостанай өңірлік университеті, Қостанай қ., Қазақстан Республикасы.*

Нургельдина Асель Ермековна *– жаратылыстану ғылымдарының магистрі, математика және физика кафедрасының аға оқытушысы, Ахмет Байтұрсынұлы атындағы Қостанай өңірлік университеті, Қостанай қ., Қазақстан Республикасы.*

Tastanov Meirambek Gabdualiyevich *– Candidate of Physical and Mathematical Sciences, Associate Professor, acting Professor of the Department of mathematics and physics, Akhmet Baitursynuly Kostanay Regional University, Kostanay, Republic of Kazakhstan.*

Nurgeldina Assel Yermekovna *– Master of Natural Sciences, Senior Lecturer of the Department of mathematics and physics, Akhmet Baitursynuly Kostanay Regional University, Kostanay, Republic of Kazakhstan.*

МАЗМҰНЫ

ГУМАНИТАРЛЫҚ ЖӘНЕ ӨНЕР ҒЫЛЫМДАРЫ

ЖАРАТЫЛЫСТАНУ ҒЫЛЫМДАРЫ

ИНЖИНИРИНГ ЖӘНЕ ТЕХНОЛОГИЯ

СОДЕРЖАНИЕ

ГУМАНИТАРНЫЕ НАУКИ И ИСКУССТВО

ЕСТЕСТВЕННЫЕ НАУКИ

ИНЖИНИРИНГ И ТЕХНОЛОГИИ

CONTENT

Редактор, корректор: *А. Симонова*
Корректорлар: *Б. Сыздыкова, Т. Цай*
Компьютерлік беттеу: *С. Красикова, И. Милокумова*

Редактор, корректор: *А. Симонова*
Корректоры: *Б. Сыздыкова, Т. Цай*
Компьютерная верстка: *С. Красикова, И. Милокумова*

Басуға 09.04.2025 ж. берілді.
Пішімі 60х84/8. Көлемі 17,5 б.т.
Тапсырыс № 060

Ахмте Байтұрсынұлы атындағы
Қостанай өңірлік университетіндегі
редакциялық-баспа бөлімінде басылған
Қостанай қ., Байтұрсынов к., 47

Подписано в печать 09.04.2025 г.
Формат 60х84/8. Объем 17,5 п.л.
Заказ № 060

Отпечатано в редакционно-издательском отделе
Костанайского регионального университета
имени Ахмет Байтұрсынұлы
г. Костанай, ул. Байтурсынова, 47