519.635.8

СҰЙЫҚТЫҚТЫҢ БУССИНЕСК ПІШІНІ ҮШІН ЖАЛҒАН АЙМАҚТАР ӘДІСІНІҢ МОДИФИКАЦИЯСЫ АРҚЫЛЫ ШЕКАРАЛЫҚ ШАРТТАРДЫ ПІШІМДЕУ

Бекенов Ж.К.,
магистрант аль-Фараби ат. ҚазҰУ,
Алматы қ., Қазақстан

Аннотация

Бұл жұмыста сығылмайтын сұйықтықтың Буссинеск пішімі үшін қысым функциясына шекаралық шарт қойылған жалған аймақтар әдісінің бір модификациясы қарастырылады. Мұнда үш өлшемді көмекші есептің жалпылама шешімінің бар болуы мен жинақталуы дәлелденеді. Нәтижені алу барысында Галеркин әдісі мен априорлы баға алу әдісі қолданылды.

Аннотация

В данной работе рассматривается модификация метода фиктивных областей для модели Буссинеска несжимаемой жидкости с заданными граничными условиями для функции давления. Здесь доказывается сходимость и существование обобщенного решения трехмерной вспомогательной задачи. Для вывода результатов были применены методы Галеркина и априорных оценок.

Abstract

In this work modification of a method of fiction areas for model of Bussinesk of incompressible liquid with the given boundary conditions for pressure function is considered. Here convergence and existence of the generalized solution of a three-dimensional auxiliary task is proved. As a result of receiving results Galerkin's methods and the prior estimates were applied.

Түйінді сөздер: *жалған аймақ, жалпылама шешім, априорлы баға, сығылмайтын сұйықтың пішімдері, компактылық.*
Ключевые слова: *фиктивные области, обобщенное решение, априорная оценка, модели несжимаемой жидкости, компактность.*
Keywords: *fiction area, generalized solution, prior assessment, models of incomepressible liquid, compactness.*

Сұйықтық динамикасы теңдеулерінің есептерінде қысым функциясы үшін шекаралық шарттарды беру арқылы келтірілген жалған аймақтар әдісін сол шекаралық шарттарды пішімдеу әдісі ретінде түсінуге болатыны белгілі жайт (мысалы, Антонцев С.Н., Кажихов А.В., Монахов В.Н., 1983). Үлкен немесе кіші коэффиценттермен жалғасқан жалған аймақтар әдісі (ЖАӘ) арқылы пішімдеу есебінің негіздемесіне оның қандай да бір шешімнің бар болуын дәлелдеу және сол шешімнің негізгі физикалық есептің сәйкес шешіміне жинақталу жылдамдығының бағасын алу жатады. Мысалы, (Коновалов А.Н., Коробицына Ж.Л., 1977) жұмысында гидродинамиканың сызықсыз пішімдері үшін ЖАӘ-нің «классикалық» деп аталатын түрі арқылы шекаралық шарттарды пішімдеу есебі зерттелінген. Осындай «классикалық» ЖАӘ үшін шешімдердің «жақсартылмайтын» жинақталу жылдамдығының бағасында кіші параметрінің дәрежесі ½ болатыны белгілі. ЖАӘ арқылы пішімдеуде шешімдердің басты қасиеттерінің бірі – жинақталу жылдамдығы болғандықтан, қазіргі таңда шешімнің тезірек жинақталу бағасын беретін басқа да жалған аймақтар әдісінің түрлері мен модификацияларын ұсыну мен негіздеу көкейтесті мәселе. Осындай ЖАӘ модификацияларының бірі алғаш рет (Куттыкожаева Ш.Н., 1998) жұмысында қарапайым математикалық физика есебі – Лаплас теңдеуіне қойылған Дирихле есебі үшін ұсынылған және негізделген. Ал бұл мақалада осы модификация идеясы сығылмайтын біртексіз сұйықтықтың үшөлшемді сызықсыз Буссинеск пішіні үшін қысым функциясына шекаралық шартты пішімдеу үшін қолданылады және негізделеді. Мұнда көмекші есептің жалпы шешімінің бар болуы мен жинақталуы дәлелденеді.

Сонымен, шекарасы $S \in C^2$ болатын $\Omega \subset R^3$ аймағындағы біртексіз сығылмайтын сұйықтық қозғалысының Буссинеск үлгісін қарастырайық [4]:

$$\frac{\partial \mathrm{v}}{\partial t} + (\mathrm{v} \cdot \nabla)\mathrm{v} = \nu \Delta \mathrm{v} - \nabla p + q\rho, \qquad div\, \mathrm{v} = 0 \tag{1}$$

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + (\mathrm{v} \cdot \nabla)\rho = 0, \tag{2}$$

алғашқы-шекаралық шарттар

$$\mathrm{v}\big|_{t=0} = \mathrm{v}_0(x),\ \mathrm{v}\big|_S = 0, \quad t \in [0,T],\ \rho\big|_{t=0} = \rho_0(x), \tag{3}$$

мұнда ν – кинетикалық тұтқырлық коэффиценті, $\mathrm{v}(t,x)$ – сұйықтық жылдамдығының векторы, $\rho(t,x)$, $p(t,x)$ – сәйкесінше тығыздық пен қысымның скалярлы функциялары.

Енді (1)-(4) үшін кіші коэффициенттермен жалғасқан жалған аймақтар әдісі модификациясы арқылы пішімдеу есебін құрастырайық.. Яғни, шекарасы S_1: $S_1 \cap S = \emptyset$ болатын $D = \Omega \cup D_1$ кеңейтілген аймағында келесі көмекші есепті қарастырамыз:

$$\frac{\partial \mathrm{v}^\varepsilon}{\partial t} + (\mathrm{v}^\varepsilon \cdot \nabla)\mathrm{v}^\varepsilon = \nu \Delta \mathrm{v}^\varepsilon - \nabla p^\varepsilon - \frac{\xi(x)\mathrm{v}^\varepsilon}{\varepsilon \left\| \mathrm{v}^\varepsilon \right\|^\beta_{L_2(D_1)}} + q\rho^\varepsilon,\ 0 < \beta < 1 \tag{4}$$

$$div\, \mathrm{v}^\varepsilon = 0, \tag{5}$$

$$\frac{\partial \rho^\varepsilon}{\partial t} + (\mathrm{v}^\varepsilon \cdot \nabla)\rho^\varepsilon = 0, \tag{6}$$

$$\mathrm{v}^\varepsilon\big|_{t=0} = \mathrm{v}_0(x),\ \mathrm{v}^\varepsilon \tau\big|_{S_1} = 0, \quad p^\varepsilon\big|_{S_1} = 0, \tag{7}$$

мұнда $0 < \varepsilon$ - кіші параметр, τ - S_1 шекарасына жанама вектор, $\xi(x) = \begin{cases} 0, & \text{в } \Omega \\ 1, & \text{в } D_1 = \mathrm{D} \setminus \Omega. \end{cases}$

Мұнда, айта кету керек, $\beta = 0$ кезінде (4)-(7) есебі қысымның шекаралық шарттары берілген «классикалық» ЖАӘ алып келеді (Смагулов Ш.С., Сейлханова Р.Б., Куттыкожаева Ш.Н., Есекеева М., 2002). Біз, осыдан бастап, (4)-(7) есебін зерттеу үшін (Смагулов Ш.С., Темирбеков Н.М., Камаубаев К.С., 2000) еңбектің белгілеулері мен технологияларын қолданамыз: мысалы, $M(D)$ жиыны:

$$M(D):\ M(D) = \left\{ \begin{matrix} \mathrm{v}(x), \mathrm{v}(x) \in C^\infty(D),\ \mathrm{div}\, \mathrm{v} = 0; \\ (\mathrm{v}(x)\tau(x)) = 0,\ x \in S_1 \end{matrix} \right\}.$$

Ал $V(D)$, $V_1(D)$ деп $L_2(D)$ и $W_2^1(D)$ нормаларындағы $M(D)$-ның тұйықтамасы арқылы алынған кеңістіктерді белгілейміз.
Енді (4)-(7) есебінің жалпылама шешімі ұғымын қарастырайық.
Анықтама. (4)-(7) есебінің жалпылама шешімі деп келесі қасиеттерді қанағаттандыратын $\{\mathrm{v}^{\varepsilon}, \rho^{\varepsilon}\}$ қос функцияларын атаймыз:

1) $\mathrm{v}^{\varepsilon} \in L_{\infty}(0,T;V(D)) \cap L_2(0,T;V_1(D)), 0 < m \le \rho^{\varepsilon} \le M < \infty$,
$\rho^{\varepsilon} \in L_{\infty}(0,T;L_{\infty}(D))$,

2) мынадай интегралдық теңдіктер орын алса:

$$\int_0^T \int_D \left(-\mathrm{v}^{\varepsilon}\Phi_t + \left(\mathrm{v}^{\varepsilon}\cdot\nabla\right)\mathrm{v}^{\varepsilon}\Phi + \nu(\mathrm{v}_x^{\varepsilon}, \Phi_x) - q\rho^{\varepsilon}\Phi\right)dxdt + \int_0^T \int_{D_1} \frac{\mathrm{v}^{\varepsilon}\Phi}{\varepsilon\left\|\mathrm{v}^{\varepsilon}\right\|_{L_2(D_1)}^{\beta}} dxdt -$$

$$-\frac{1}{2}\int_D \mathrm{v}_0(x)\Phi_0(x)dx + \nu\int_0^T \int_{S_1} K(x)\mathrm{v}^{\varepsilon}\Phi dS_1 dt = 0, \tag{8}$$

$$\int_0^T \left(\rho^{\varepsilon}, \phi_t + \left(\mathrm{v}^{\varepsilon}\cdot\nabla\right)\phi\right)_{L_2(D)} dt + \left(\rho_0\phi_0(0)\right)_{L_2(D)} = 0, \tag{9}$$

$\forall\Phi \in L_2(0,T;V_1(D)) \cap W_2^1(0,T;V(D))$, $\phi \in W_2^1\left(0,T;W_2^1(D)\right)$, $\Phi(T) = 0$,
$\phi(T) = 0$, $0 < K(x)$ - S_1*-дің екі еселенген қисықтығы.*

Теорема. $0 < m \le \rho_0(x) \le M < \infty$, $\mathrm{v}_0(x) \in L_2(\Omega)$ болсын. Сонда (4)-(7) көмекші есебінің ең болмағанда бір жалпылама шешімі бар және ол үшін келесі бағалар орын алады:

$$\left\|\mathrm{v}^{\varepsilon}\right\|_{L_{\infty}\left(0,T;\overset{0}{J}(D)\right)} + \left\|\mathrm{v}^{\varepsilon}\right\|_{L_2\left(0,T;\overset{0}{J}{}^1(D)\right)} + \frac{1}{\varepsilon}\int_0^{\mathrm{T}} \left\|\mathrm{v}^{\varepsilon}\right\|_{L_2(D_1)}^{2-\beta} dt \le C_1 < \infty, \tag{10}$$

$$0 < m \le \rho^{\varepsilon} \le M < \infty, \ \left\|\rho^{\varepsilon}\right\|_{L_{\infty}(0,T;L_{\infty}(D))} \le C_2 < \infty. \tag{11}$$

Мұнда, Ω-ның сыртында $\mathrm{v}_0(x), \rho_0(x), q$ функциялары нөлмен жалғастырылған.

Дәлелдеу. Алдымен кажетті априорлы бағаларды алайық. Параболалық теңдеулерге қатысты максимум принципін қолдана отырып, (6)-дан алатынымыз:

$$0 < m \le \rho^{\varepsilon} \le M < \infty, \ \left\|\rho^{\varepsilon}(t)\right\|_{L_{\infty}(0,T;L_{\infty}(D))} \le C < \infty. \tag{12}$$

Ары қарай $L_2(D)$-да (4)-ті v^{ε}-ға скалярлы түрде көбейтейік:

$$\begin{aligned} &\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\left\|\mathrm{v}^{\varepsilon}\right\|_{L_2(D)}^2 + \nu\left\|\mathrm{v}_x^{\varepsilon}\right\|_{L_2(D)}^2 + \frac{1}{\varepsilon}\left\|\mathrm{v}^{\varepsilon}\right\|_{L_2(D_1)}^{2-\beta} + \nu\int_{S_1} K(x)\left|\mathrm{v}^{\varepsilon}\right|^2 dS_1 = \\ &= \int_D q\rho^{\varepsilon}\mathrm{v}^{\varepsilon}dx + \int_{S_1} \mathrm{v}^{\varepsilon} n\left|\mathrm{v}^{\varepsilon}\right|^2 dS_1 \end{aligned} \tag{13}$$

(13)-тің оң жағын (12)-ні және Гельдер, Юнг, тиістілік теоремалары теңсіздіктерін (Смагулов Ш.С., Темирбеков Н.М., Камаубаев К.С., 2000) қолдана отырып, нәтижесінде (10) бағасын аламыз.

Лемма (компактілік туралы). Жоғарыдағы теореманың барлық шарттары орындалды делік, онда келесі теңсіздік орын алады:

$$\left\|\mathrm{v}^{\varepsilon}(t+\delta) - \mathrm{v}^{\varepsilon}(t)\right\|_{L_2(0,T-\delta;L_2(D))}^2 \le C\delta^{1/4}, \ \forall\delta \in [0, T-\delta], \tag{14}$$

мұнда С тұрақтысы ε параметрінен тәуелсіз. Бұл лемма [4] еңбегіндегідей стандартты түрде дәлелденеді.
Теореманың кейінгі дәлелдемесі үшін Галеркин әдісін[4] қолданамыз. (4)-(7) есебінің $\mathrm{v}_N^\varepsilon(t,x),\ N=1,2,\ldots,$ жуық шешімін мынадай түрде іздейміз:

$$\mathrm{v}_N^\varepsilon(t,x)=\sum_{j=1}^{N}\alpha_j^N(t)\omega_j\ ,\quad \text{мұнда } \alpha_j^N(t)\in C^1(0,T),\ j=1,2,\ldots,N.$$

Бұл жерде $\{\omega_j\}$ - $L_2(D)$-де ортонормалданған $W_2^2(D)\cap V_1(D)$ кеңістігіндегі базис. Және де $\alpha_j^N(t)$ ізделінді функцияларымыз төмендегі теңдеулер жүйесін қанағаттандырады делік:

$$\left(\left(\mathrm{v}_{Nt}^\varepsilon+\left(\mathrm{v}_N^\varepsilon\cdot\nabla\right)\mathrm{v}_N^\varepsilon\right),\omega_j\right)_{L_2(D)}+\nu\left(\mathrm{v}_{Nx}^\varepsilon,\omega_{jx}\right)_{L_2(D)}+\nu\int_{S_1}K(x)\mathrm{v}_N^\varepsilon\omega_j dS_1=$$

$$=\left(\rho_N^\varepsilon q,\omega_j\right)_{L_2(D)}-\frac{1}{\varepsilon\left\|\mathrm{v}_N^\varepsilon\right\|_{L_2(D_1)}^{\beta}}\left(\mathrm{v}_N^\varepsilon,\omega_j\right)_{D_1},\quad div\mathrm{v}_N^\varepsilon=0, \tag{15}$$

$$\mathrm{v}_N^\varepsilon\Big|_{t=0}=\mathrm{v}_0,\ \alpha_j^N(0)=\left(\mathrm{v}_0,\omega_j\right),\quad j=1,2,\ldots,N,$$

ал $\rho_N^\varepsilon(t,x)$ функциясы келесі есептен табылады:

$$\rho_{Nt}^\varepsilon+\left(\mathrm{v}_N^\varepsilon\cdot\nabla\right)\rho_N^\varepsilon=0,\ \rho_N^\varepsilon\Big|_{t=0}=\rho_0(x),\quad t\in[0,T]. \tag{16}$$

(15)-(16) есебінің бірмәнді шешімділігі [4]-дей дәлелденеді.
Жоғарыдағыдай (16)-дан мынадай баға аламыз:

$$0<m\le\rho_N^\varepsilon\le M<\infty,\ \left\|\rho_N^\varepsilon(t)\right\|_{L_\infty(0,T;L_\infty(D))}\le C_1<\infty. \tag{17}$$

Ал содан кейін (15)-тің j-ші теңдеуін $\alpha_j^N(t)$-ға көбейте отырып, $j=1,\ldots,N$ бойынша қосындылап, келесі бағаны аламыз:

$$\left\|\mathrm{v}_N^\varepsilon\right\|_{L_\infty\left(0,T;\overset{0}{J}(D)\right)}+\left\|\mathrm{v}_N^\varepsilon\right\|_{L_2\left(0,T;\overset{0}{J^1}(D)\right)}+\frac{1}{\varepsilon}\int_0^{T}\left\|\mathrm{v}^\varepsilon\right\|_{L_2(D_1)}^{2-\beta}dt\le C_1<\infty, \tag{18}$$

Сонымен бірге, жуық шешімдер үшін келесі теңсіздік те орынды:

$$\left\|\mathrm{v}_N^\varepsilon(t+\delta)-\mathrm{v}_N^\varepsilon(t)\right\|_{L_2(0,T-\delta;L_2(D))}^2\le C\delta^{1/4};\quad\forall\delta\in[0,T-\delta]. \tag{19}$$

Бұл (17)-(19) бағалары v_N^ε, ρ_N^ε тізбегінен $N\to\infty$ кезінде келесі тұжырымдар орын алатындай тізбекше бөліп алуға мүмкіндік береді:

$\mathrm{v}_N^\varepsilon(t)\to\mathrm{v}^\varepsilon(t)\ *\ L_\infty(0,T;V(D))$-те әлсіз,

$\mathrm{v}_N^\varepsilon(t)\to\mathrm{v}^\varepsilon(t)\ L_2(0,T;V_1(D))$-де әлсіз,

$\rho_N^\varepsilon(t)\to\rho^\varepsilon(t)\ *\ L_\infty(0,T;L_\infty(D))$-те әлсіз,

$\mathrm{v}_N^\varepsilon\to\mathrm{v}^\varepsilon\ L_2(0,T;L_2(D))$-де мықты,

$\frac{1}{\sqrt[2-\beta]{\varepsilon}}\mathrm{v}_N^\varepsilon(t)\to\frac{1}{\sqrt[2-\beta]{\varepsilon}}\mathrm{v}^\varepsilon(t)\ L_{2-\beta}(0,T;L_2(D_1))$-да әлсіз

Сонда, сәйкес интегралды теңдіктерде $N \to \infty$ болғанда, шекке көше отырып, $\mathrm{v}^{\varepsilon}(t,x)$, $\rho^{\varepsilon}(t,x)$ шектік функцияларының (4)-(7)-нің жалпылама шешімі екеніне көзіміз жетеді[4].

Сонымен бірге, v^{ε}, ρ^{ε} жалпылама шешімдер үшін (10)-(11) біртекті бағалары орындалатындықтан, $\mathrm{v}^{\varepsilon}, \rho^{\varepsilon}$ тізбектерінен $\varepsilon \to 0$ болғанда келесі қасиеттері бар тізбекшелер бөліп алуға болады:

$\mathrm{v}^{\varepsilon}(t) \to \mathrm{v}(t)$ * $L_{\infty}(0,T;V(D))$-те әлсіз,

$\mathrm{v}^{\varepsilon}(t) \to \mathrm{v}(t)$ $L_2(0,T;V_1(D))$-де әлсіз,

$\rho^{\varepsilon}(t) \to \rho(t)$ * $L_{\infty}(0,T;L_{\infty}(D))$-те әлсіз,

$\rho^{\varepsilon}(t) \to \rho(t)$ $L_2(0,T;L_2(D))$-де күшті

$\mathrm{v}^{\varepsilon}(t) \to 0$ $L_2(0,T;L_2(D_1))$-де күшті.

Әрі қарай, тура [4]-дей, $\rho(t), \mathrm{v}(t)$ шектік функциялары (1)-(3) есебінің жалпылама шешімі екенін көрсетуге болады. Теорема дәлелденді.

Әдебиет тізімі

Антонцев С.Н., Кажихов А.В., Монахов В.Н. Краевые задачи механики неоднородных жидкостей. – Новосибирск: Наука, 1983. – 318 с.

Коновалов А.Н., Коробицына Ж.Л. Моделирование краевых условий в задачах с помощью метода фиктивных областей // Численное решение задач фильтрации многофазной несжимаемой жидкости: Труды III Всесоюз. конф. – Новосибирск, 1977. – С.115–120.

Куттыкожаева Ш.Н. Метод фиктивных областей для уравнений Навье-Стокса // Вестник КазГУ. Серия мат., мех., инф. – 1998. – №13. – С.54–59.

Смагулов Ш.С., Темирбеков Н.М., Камаубаев К.С. Моделирование методом фиктивных областей граничного условия для давления в задачах течения вязкой жидкости // Сибирский журнал вычислительной математики. – Новосибирск: СО РАН, 2000. – Т.3, №1. – С. 57–71.

Смагулов Ш.С., Сейлханова Р.Б., Куттыкожаева Ш.Н., Есекеева М. Суперсходимость метода фиктивных областей // Совместный выпуск по материалам международной конференции «Вычислительные технологии и математическое моделирование в науке, технике и образовании» (18-20 сентября). – Новосибирск–Алматы, 2002. – №4(32). – С. 135–140.