ISSN 2310-3353

BAITURSYNULY UNIVERSITY

«АХМЕТ БАЙТҰРСЫНҰЛЫ АТЫНДАҒЫ ҚОСТАНАЙ ӨҢІРЛІК УНИВЕРСИТЕТІ» КЕАҚ

ҚМПИ ЖАРШЫСЫ

КӨПСАЛАЛЫ ҒЫЛЫМИ ЖУРНАЛЫ
МНОГОПРОФИЛЬНЫЙ НАУЧНЫЙ ЖУРНАЛ

№ 4
2025

PUBLISHINGS KSPI

BU BAITURSYNULY UNIVERSITY

ҚМПИ ЖАРШЫСЫ

ВЕСТНИК КГПИ

2025 ж., қазан, №4 (80)
Журнал 2005 ж. қаңтардан бастап шығады
Жылына төрт рет шығады

Құрылтайшы: ***Ахмет Байтұрсынұлы атындағы Қостанай өңірлік университеті***

Бас редактор: ***Куанышбаев С.Б.***, география ғылымдарының докторы, Ахмет Байтұрсынұлы атындағы ҚӨУ, Қазақстан.
Бас редактордың орынбасары: ***Жарлыгасов Ж.Б.***, ауыл шаруашылығы ғылымдарының кандидаты, Ахмет Байтұрсынұлы атындағы ҚӨУ, Қазақстан.

РЕДАКЦИЯ АЛҚАСЫ

***Әлімбаев А.Е.*,** философия докторы (PhD), А.Қ. Құсайынов атындағы Еуразия гуманитарлық институты, Қазақстан.
Балтабаева А.С., Қостанай облысы әкімдігі білім басқармасының «Әдістемелік орталығы» КММ, Қостанай қ., Қазақстан.
Бережнова Е.В., педагогика ғылымдарының докторы, профессор Ресей Федерациясы Сыртқы істер министрлігінің Мәскеу мемлекеттік Халықаралық қатынастар институты (университеті), Ресей.
***Емин Атасой*,** PhD докторы, Улудаг университеті, Бурса қ., Түркия.
***Зоя Микниене*,** докторы, (PhD) Литва денсаулық туралы ғылым университеті, Каунас қ., Литва Республикасы.
***Качеев Д.А.*,** философия ғылымдарының кандидаты, тарих магистрі, «Челябі мемлекеттік университеті» ЖББ ФМБББМ Қостанай филиалы, Қазақстан.
***Ксембаева С.К.*,** педагогика ғылымдарының кандидаты, «Торайғыров университеті» КЕАҚ, Қазақстан.
***Лина Анастасова*,** әлеуметтану ғылымдарының докторы, Бургас еркін университеті, Бургас қ., Болгария.
***Медетов Н.А.*,** физика-математика ғылымдарының докторы, «Ш. Уалиханов атындағы Көкшетау университеті» КЕАҚ, Қазақстан.
***Мишулина О.В.*,** экономика ғылымдарының докторы, «Челябі мемлекеттік университеті» ЖББ ФМБББМ Қостанай филиалы, Қазақстан.
Рахимова Э.Е., «№ 1 мектеп-лицей» КММ мұғалімі, «Үздік педагог-2023 жыл», Қостанай қ., Қазақстан.
***Соловьев С.А.*,** биология ғылымдарының докторы, Новосібір мемлекеттік экономика және басқару университеті, Ресей.
***Скороходов Д.М.*,** техника ғылымдарының кандидаты, «Ресей мемлекеттік аграрлық университеті – К.А. Тимирязев атындағы Мәскеу ауыл шаруашылық академиясы» ЖББ ФМБББМ, Ресей.
Скударева Г.Н., педагогика ғылымдарының докторы, профессор, Мемлекеттік гуманитарлық-технологиялық университетінің ректоры, Орехово-Зуево қ., Ресей
***Сычева И.Н.*,** ауыл шаруашылығы ғылымдарының кандидаты, «Ресей мемлекеттік аграрлық университеті – К.А. Тимирязев атындағы Мәскеу ауыл шаруашылық академиясы» ЖББ ФМБББМ, Ресей.
***Ташев А.Н.*,** экология бойынша биология ғылымдарының кандидаты, орман шаруашылығы университеті, София қ., Болгария.
***Уразбоев Г.У.*,** физика-математика ғылымдарының докторы, Ургенч мемлекеттік университеті, Өзбекстан.

Тіркеу туралы куәлік №5452-Ж
Қазақстан Республикасының ақпарат министрлігімен 17.09.2004 берілген.
Мерзімді баспа басылымын қайта есепке алу 07.11.2023 ж.
Жазылу бойынша индексі 74081

Редакцияның мекен-жайы:
110000, Қостанай қ., Байтұрсынов к., 47
(Редакциялық-баспа бөлімі)
Тел.: 8(7142) 51-11-76

© Ахмет Байтұрсынұлы атындағы
Қостанай өңірлік университеті

КӨПСАЛАЛЫ ҒЫЛЫМИ ЖУРНАЛЫ | № 4 (80) 2025 | МНОГОПРОФИЛЬНЫЙ НАУЧНЫЙ ЖУРНАЛ

№4 (80), октябрь 2025 г.
Издается с января 2005 года
Выходит 4 раза в год

Учредитель: ***Костанайский региональный университет имени Ахмет Байтұрсынұлы***

Главный редактор: ***Куанышбаев С.Б.***, доктор географических наук, КРУ имени Ахмет Байтұрсынулы, Казахстан.
Заместитель главного редактора: ***Жарлыгасов Ж.Б.***, кандидат сельскохозяйственных наук, КРУ имени Ахмет Байтұрсынұлы, Казахстан.

РЕДАКЦИОННАЯ КОЛЛЕГИЯ

***Алимбаев А.Е.*,** доктор философии (PhD), Евразийский гуманитарный институт имени А.К. Кусаинова, Казахстан.
Балтабаева А.С., директор КГУ «Методический центр» Управления образования Костанайской области, г. Костанай, Казахстан.
Бережнова Е.В., доктор педагогических наук, профессор, Московский государственный институт международных отношений (университет) Министерства иностранных дел Российской Федерации, Россия.
Емин Атасой, доктор PhD, Университет Улудаг, г. Бурса, Турция.
***Зоя Микниене*,** доктор (PhD), Литовский университет наук здоровья, г. Каунас, Республика Литва.
***Качеев Д.А.*,** кандидат философских наук, магистр истории, Костанайский филиал ФГБОУ ВО «ЧелГУ», Казахстан.
***Ксембаева С.К.*,** кандидат педагогических наук, НАО «Торайгыров университет», Казахстан.
***Лина Анастассова*,** доктор социологии, Бургасский свободный университет, г. Бургас, Болгария.
***Медетов Н.А.*,** доктор физико-математических наук, НАО «Кокшетауский университет им. Ш. Уалиханова», Казахстан.
***Мишулина О.В.*,** доктор экономических наук, Костанайский филиал ФГБОУ ВО «ЧелГУ», Казахстан.
Рахимова Э.Е., учитель, КГУ «Школа-лицей № 1», «Лучший педагог-2023 года», г. Костанай, Казахстан.
***Соловьев С.А.*,** доктор биологических наук, Новосибирский государственный университет экономики и управления, Россия.
***Скороходов Д.М.*,** кандидат технических наук, ФГБОУ ВО РГАУ-МСХА имени К.А. Тимирязева, Россия.
Скударева Г.Н., доктор педагогических наук, профессор, ректор Государственного гуманитарно-технологического университета, г. Орехово-Зуево, Россия.
***Сычева И.Н.*,** кандидат сельскохозяйственных наук, ФГБОУ ВО РГАУ-МСХА имени К.А. Тимирязева, Россия.
***Ташев А.Н.*,** кандидат биологических наук по экологии, Лесотехнический университет, г. София, Болгария.
***Уразбоев Г.У.*,** доктор физико-математических наук, Ургенчский государственный университет, Узбекистан.

Свидетельство о регистрации № 5452-Ж
выдано Министерством информации Республики Казахстан 17.09.2004 г.
Переучёт периодического печатного издания 07.11.2023 г.
Подписной индекс 74081

Адрес редакции:
110000, г. Костанай, ул. Байтурсынова, 47
(Редакционно-издательский отдел)
Тел.: 8(7142) 51-11-76

© Костанайский региональный университет имени Ахмет Байтұрсынұлы

ЖАРАТЫЛЫСТАНУ ҒЫЛЫМДАРЫ
ЕСТЕСТВЕННЫЕ НАУКИ

УДК 517.54

Майер, Ф.Ф.,
кандидат физико-математических наук, доцент, ассоциированный профессор кафедры математики и физики, КРУ имени Ахмет Байтұрсынұлы, г. Костанай, Республика Казахстан
Нарижняя, И.И.,
магистрант ОП 7М05401 – Математика, КРУ имени Ахмет Байтұрсынұлы, г. Костанай, Республика Казахстан

ОБ ОДНОЙ ФУНКЦИИ КАРАТЕОДОРИ СПЕЦИАЛЬНОГО ВИДА

Аннотация

Класс функций $\varphi(z)$ Каратеодори, регулярных в единичном круге, нормированных условием $\varphi(0) = 1$ и имеющих положительную действительную часть, играет важную роль в геометрической теории функций. Класс Каратеодори позволяет в удобной форме не только определять различные классы регулярных функций, но и исследовать данные классы. С помощью функций Каратеодори задаются многие подклассы класса однолистных функций, в том числе, звездообразных, почти выпуклых и других функций. При этом решение многих экстремальных задач на данных подклассах сводится к анализу функций с положительной действительной частью.

В настоящей статье исследуется конкретная функция Каратеодори, которая в дальнейшем будет выступать в роли мажоранты подчинения при определении некоторых классов функций. В ходе исследования мы установим различные геометрические свойства данной функции, в том числе, получим точные оценки действительной части данной функции в круге радиуса r, $0 \leq r < 1$.

Результаты данной статьи станут фундаментом для проведения дальнейших исследований некоторых классов регулярных функций.

Ключевые слова: *функции Каратеодори, выпуклые функции, почти выпуклые функции, оценки аналитических функций.*

1 Введение

Пусть $E = \{z: |z| < 1\}$ – открытый единичный круг на комплексной плоскости. Будем рассматривать функции $\varphi(z)$, имеющие нормировку $\varphi(0) = 1$ и регулярные в круге E. Класс таких функций обозначим символом $\mathcal{A}$. Еще будем расматривать регулярные в круге E функций $f(z)$ с нормировкой $f(0) = f'(0) - 1 = 0$, класс которых обозначим символом $\mathcal{N}$.

Традиционно, например [1], символами S^{o} и K будем обозначать классы выпуклых и почти выпуклых функций $f(z)$ из $\mathcal{N}$.

В настоящей статье мы введем функцию Каратеодори, которая в последующем будет играть роль мажоранты подчинения в определении одного класса регулярных функций, и рассмотрим основные свойства данной функции.

2 Материалы и методы

Одним из центральных инструментов современной геометрической теории функций комплексного переменного (ГТФКП) [2] является принцип подчиненности регулярных функций [2, с. 356]. Его суть заключается в сравнении регулярных функций на единичном

круге по принципу функционального включения образов. Пусть $\varphi(z)$ и $\varphi_0(z)$ – регулярные функции в единичном круге E.

Говорят [2, с. 356], что функция $\varphi(z)$ подчинена функции $\varphi_0(z)$ (записывается $\varphi(z) \prec \varphi_0(z)$), если существует регулярная функция $\omega(z)$, удовлетворяющая условиям $\omega(0) = 0$ и $|\omega(z)| < 1$ для всех $z \in E$, такая что

$$\varphi(z) = \varphi_0[\omega(z)],\ z \in E.$$

Для однолистной функции $\varphi_0(z)$ это означает, что область значений функции $\varphi(z)$ содержится в области значений функции $\varphi_0(z)$, то есть $\varphi(E) \subset \varphi_0(E)$, и $\varphi(0) \subset \varphi_0(0)$.

Метод подчиненности служит мощным средством для задания и исследования различных классов регулярных и однолистных функций. В ГТФКП уже устоявшимся считается унифицированное задание классов функций $\varphi(z) \in \mathcal{A}$ с помощью условия подчиненности $\varphi(z) \prec \varphi_0(z)$, где $\varphi_0(z)$ – вполне определенная мажоранта подчинения.

С помощью принципа подчиненности можно описывать геометрические свойства функций (звездообразность, выпуклость [1], почти выпуклость [3] и др.) через функциональные неравенства или условия подчиненности заданным функциям-мажорантам специального вида. Например, если $f(z) \in \mathcal{N}$ и выполняется подчиненность

$$1 + z\frac{f''(z)}{f'(z)} \prec \varphi_0(z),$$

где $\varphi_0(z)$ – регулярная функция с положительной вещественной частью, то функция $f(z)$ принадлежит классу S^{o} выпуклых функций. Аналогичные схемы применяются для построения унифицированных семейств функций с различными геометрическими свойствами.

Значение метода подчиненности состоит в его универсальности и аналитической гибкости. Он позволяет не только формулировать новые классы функций, но и устанавливать для них оценки, включения, экстремальные соотношения. Кроме того, подчиненность тесно связана с понятием мажорант, что дает возможность обобщать известные результаты, полученные ранее для конкретных классов, на более широкий спектр функций.

В современной ГТФКП метод подчиненности играет роль унифицирующего принципа: многие известные методы (методы интегральных преобразований, дифференциальных подчиненностей, неравенств коэффициентов) представляют собой его частные случаи или следствия. Благодаря этому подходу удается систематически исследовать регулярные функции с заданными геометрическими свойствами и получать прикладные результаты, в частности, в гидродинамике, теории конформных отображений и моделировании физических полей.

3-4 Результаты и обсуждение

Рассмотрим функцию

$$f_k(z) = \frac{1}{k}(1 - e^{-kz}), k > 0. \quad (1)$$

Эта функция часто играет роль экстремальной в различных вопросах ГТФКП. Например, в [1] отмечается, что при $k > \pi$ функция $f_k(z)$ является не однолистной в круге E. Это непосредственно вытекает из того факта, что функция $w = e^z$ в качестве своей области однолистности имеет любую горизонтальную полосу ширины 2π.

Теорема 1. *Если функция $f_k(z)$ определяется посредством формулы* (1), *то она имеет следующие свойства*:

1) *функция $f_k(z)$ является выпуклой в круге E при $0 < k \leq 1$. Кроме того*,

$$\lim_{k\to 0} f_k(z) = z\,; \quad (2)$$

2) *функция* $f_k(z)$ *является почти выпуклой порядка* $\gamma \geq \gamma_0$ *в круге* E*, причем*

$$\gamma_0 = \frac{2}{\pi}\left(\sqrt{k^2-1} - arccos\frac{1}{k}\right) \tag{3}$$

и $1 < k \leq k_0 \approx 2{,}97$*, где* k_0 *– является корнем уравнения*

$$\sqrt{k^2-1} - arccos\frac{1}{k} = \frac{\pi}{2}. \tag{4}$$

3) *функция* $f_k(z)$ *является однолистной в круге* E *при* $0 < k \leq \pi$.

Доказательство. Рассмотри первый случай, когда $0 < k \leq 1$. Нетрудно вычислить, что

$$z\frac{f_k''(z)}{f_k'(z)} = -kz,$$

поэтому

$$1 + Re\left(z\frac{f_k''(z)}{f_k'(z)}\right) = 1 - k\,Re\,z > 1 - k \geq 0$$

при $k \leq 1$. Значит, при $0 < k \leq 1$ выполняется условие выпуклости [1], поэтому $f_k(z) \in S^o$ в круге E.

Если $k \to 0$, то по теореме Лопиталя находим

$$\lim_{k\to 0} f_k(z) = \lim_{k\to 0}\frac{1-e^{-kz}}{k} = \lim_{k\to 0}(e^{-kz}z) = z.$$

Установим теперь, при каких значениях k функция $f_k(z)$ будет почти выпуклой порядка γ [4-5]. Как отмечается в [1], если для функции

$$h(z) = z\frac{f_k''(z)}{f_k'(z)} = -kz$$

для всех r, $0 < r < 1$, выполняется условие

$$\int_0^{2\pi}\left|1 + Re\,h(re^{i\theta})\right|d\theta \leq (1+\gamma)2\pi, \tag{5}$$

то $f_k(z)$ является почти выпуклой порядка γ в круге E. Так как по известным свойствам гармонических функций

$$\int_0^{2\pi}\left|1 + Re\,h(re^{i\theta})\right|d\theta \leq \int_0^{2\pi}\left|1 + Re\,h\left(e^{i\theta}\right)\right|d\theta\,,$$

то, обозначив $g(\theta) = 1 + Re\,\varphi_0\left(e^{i\theta}\right) = 1 - k\cos\theta$, видим, что для выполнения условия (5) достаточно проверить неравенство

$$\int_0^{2\pi}\left|1 + \mathrm{Re}\,h\left(e^{i\theta}\right)\right|d\theta = \int_0^{2\pi}|g(\theta)|d\theta = \int_0^{2\pi}|1 - k\cos\theta|d\theta \leq (1+\gamma)2\pi. \tag{5′}$$

Если $0 < k \leq 1$, то $\int_0^{2\pi}|g(\theta)|d\theta = 2\pi$, значит, выполняется условие (5) с $\gamma = 0$ и мы приходим к установленному выше выводу, что $f_k(z) \in S^o$ в круге E.

Поэтому будем считать, что $k > 1$. Пусть $\theta_0 \in (0,\pi)$ – корень уравнения $g(\theta) = 0$. Из равенства $g(\theta) = 1 - k\cos\theta$ находим, что $\theta_0 = \arccos\frac{1}{k}$. Нетрудно проверить следующие свойства функции $g(\theta)$ – четность, 2π-периодичность и знакопостоянство на промежутках:

$$g(\theta)\begin{cases}\leq 0, & -\theta_0 \leq \theta \leq \theta_0\\ \geq 0, & \theta_0 \leq \theta \leq 2\pi-\theta_0\end{cases}.$$

При этом, $g(\theta)$ убывает на $(-\pi;0)$ и возрастает на $(0;\pi)$.

В силу этого

$$\int_0^{2\pi}|g(\theta)|d\theta=\int_{-\theta_0}^{\theta_0}|g(\theta)|d\theta+\int_{\theta_0}^{2\pi-\theta_0}|g(\theta)|d\theta=$$

$$-\int_{-\theta_0}^{\theta_0}g(\theta)d\theta+\int_{\theta_0}^{2\pi-\theta_0}g(\theta)d\theta=-2\int_{-\theta_0}^{\theta_0}g(\theta)d\theta+\int_{-\theta_0}^{\theta_0}g(\theta)d\theta+\int_{-\theta_0}^{2\pi-\theta_0}g(\theta)d\theta.$$

Из теоремы о среднем получаем

$$\int_0^{2\pi}\left[1+h\left(e^{i\theta}\right)\right]d\theta=2\pi\left[1+h(0)\right]=2\pi \quad\Rightarrow\quad \int_{-\theta_0}^{2\pi-\theta_0}g(\theta)d\theta=2\pi.$$

Поэтому

$$\int_0^{2\pi}|g(\theta)|d\theta=-4\int_0^{\theta_0}g(\theta)d\theta+\int_{-\theta_0}^{2\pi-\theta_0}g(\theta)d\theta=-4\int_0^{\theta_0}g(\theta)d\theta+2\pi$$

и из неравенства (5), находим

$$-4\int_0^{\theta_0}g(\theta)d\theta+2\pi\leq(1+\gamma)2\pi \quad\Leftrightarrow\quad -4\int_0^{\theta_0}(1-k\cos\theta)\,d\theta+2\pi\leq(1+\gamma)2\pi$$

или

$$\gamma\geq\gamma_0=-\frac{2}{\pi}\int_0^{\theta_0}(1-k\cos\theta)d\theta.$$

Подставляя сюда $\theta_0=arccos\frac{1}{k}$, получаем выражение для γ_0:

$$\gamma_0=-\frac{2}{\pi}(\theta_0-k\sin\theta_0)=\frac{2}{\pi}\left(k\sqrt{1-\frac{1}{k^2}}-arccos\frac{1}{k}\right),$$

откуда окончательно выводим

$$\gamma\geq\gamma_0=\frac{2}{\pi}\left(\sqrt{k^2-1}-arccos\frac{1}{k}\right).$$

Теперь рассмотрим функцию

$$\gamma_0=\gamma_0(k)=\frac{2}{\pi}\left(\sqrt{k^2-1}-arccos\frac{1}{k}\right).$$

Для нее

$$\gamma_0'(k)=\frac{2}{\pi}\frac{\sqrt{k^2-1}}{k}>0$$

при $k>1$, поэтому $\gamma_0=\gamma_0(k)$ является монотонно возрастающей функцией при $k>1$. Значит, существует обратная функция $k=k(\gamma_0)$, причет $k(\gamma_0)$ также монотонно возрастает на $0<\gamma_0\leq 1$. Поэтому

$$\max_{0<\gamma_0\leq 1}k(\gamma_0)=k_0\approx 2{,}97,$$

где $k_0=k(1)$ – корень уравнения (4).

Нетрудно проверить, что порядок почти выпуклости γ_0 уточнить нельзя. Возьмем $\theta_1 = -\theta_0, \theta_2 = \theta_0$. Поскольку из (5) следует равенство

$$2\int_0^{\theta_0} g(\theta)d\theta = -\gamma_0\pi,$$

то

$$\int_{\theta_1}^{\theta_2} g(\theta)d\theta = \int_{-\theta_0}^{\theta_0} g(\theta)d\theta = 2\int_0^{\theta_0} g(\theta)d\theta = -\gamma_0\pi.$$

Следовательно, в неравенстве

$$\int_{\theta_1}^{\theta_2}\left(1 + Re\left(z\frac{f_k''(z)}{f_k'(z)}\right)\right)d\theta \geq -\gamma\pi\,, z = e^{i\theta}$$

при $\theta_1 = -\theta_0, \theta_2 = \theta_0$ достигается равенство. Это означает, что порядок почти выпуклости γ_0, где γ_0 задается по формуле (3), является точным.

Теорема 1 доказана.

Рассмотрим функцию

$$\varphi_k(z) = \frac{1}{1-e^{-k}}\left(1 - e^{-k(1+z)}\right), 0 < k \leq \pi, \qquad (6)$$

которая в следующей статье будет играть роль мажоранты подчинения в одном классе регулярных функций.

Поскольку

$$\varphi_k(z) = 1 + \frac{k}{e^k - 1}f_k(z),$$

то из теоремы 1 и из формулы (6) сразу вытекает

Теорема 2. *Пусть функция $\varphi_k(z)$ определяется посредством формулы* (6). *Тогда функция $\varphi_k(z)$* является симметричной *относительно действительной оси, т.е., удовлетворяет условию $\varphi_k(\overline{z}) = \overline{\varphi_k(z)}, z \in E$. Кроме того,*

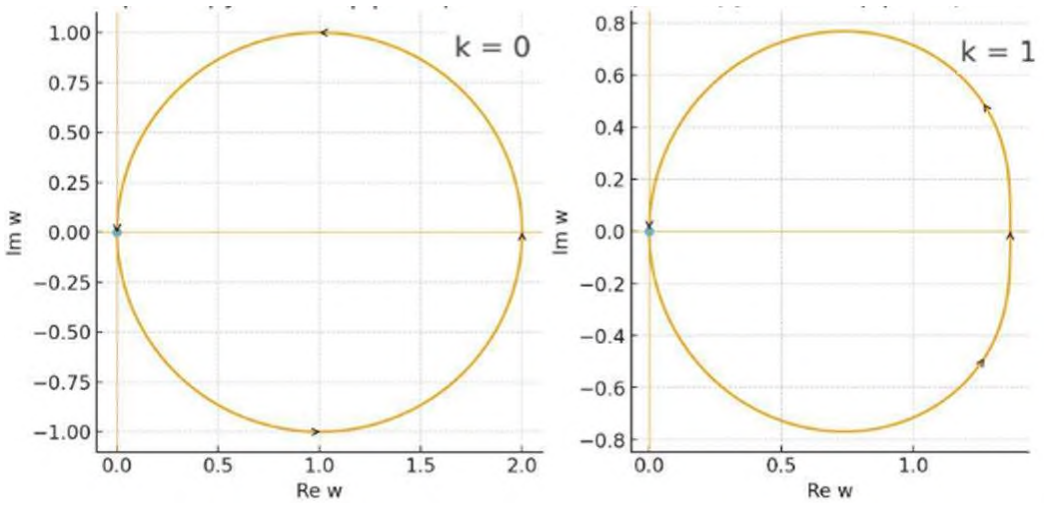
1) *при $0 < k \leq 1$ область $\varphi_k(E)$ является выпуклой;*

2) $$\lim_{k\to 0}\varphi_k(z) = 1 + z\,; \qquad (7)$$

3) *функция $\varphi_k(z)$ при $1 < k \leq k_0$, где $k_0 \approx 2{,}97$ – является корнем уравнения* (4), *является почти выпуклой порядка $\gamma \geq \gamma_0$, где γ_0 задается посредством формулы* (3);

3) *функция $\varphi_k(z)$ при $0 < k \leq \pi$ является однолистной в круге E.*

Ниже на рисунке 1 показана область значений функции $\varphi_k(z)$ при некоторых значениях параметра k



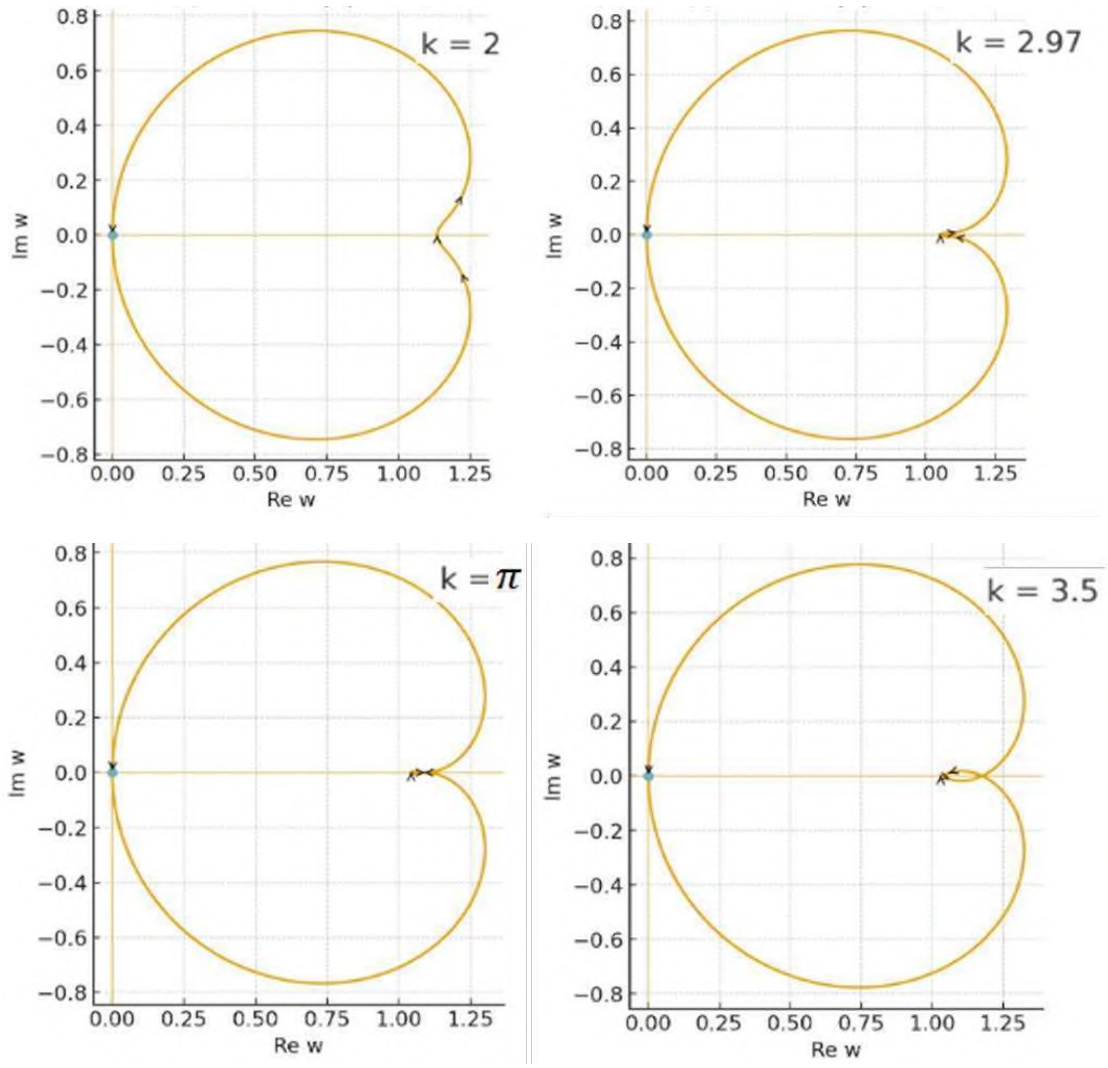


Рисунок 1 – Область $\varphi_k(E)$ при некоторых значениях параметра k

Теорема 3. *Пусть функция* $\varphi_k(z)$ *задается по формуле* (6). *Тогда выполняются следующие точные оценки:*

1) *если* $0 < k \le 1$, *то в круге* $|z| \le r$, $0 \le r < 1$

$$\frac{1}{1-e^{-k}}\left(1-e^{-k(1-r)}\right) \le Re\ \varphi_k(z) \le \frac{1}{1-e^{-k}}\left(1-e^{-k(1+r)}\right); \qquad (8)$$

2) *если* $1 < k \le \pi$, *то*
в круге $|z| \le r$, $0 \le\ r \le 1/k$,

$$\frac{1}{1-e^{-k}}\left(1-e^{-k(1-r)}\right) \le Re\ \varphi_k(z) \le \frac{1}{1-e^{-k}}\left(1-e^{-k(1+r)}\right), \qquad (9)$$

в круге $|z| \le r$, $1/k < r < 1$,

$$\frac{1}{1-e^{-k}}\left(1-e^{-k(1-r)}\right) \le Re\ \varphi_k(z) \le \frac{1}{1-e^{-k}}\left[1-e^{-k(1+r\cos\theta_1)}\cdot\cos\theta_1\right], \qquad (10)$$

где $\theta_1 \in (\arccos\frac{1}{kr}, \pi)$ *– определяется как корень уравнения* $kr\sin\theta_1 = \theta_1$.

Доказательство. Ниже будем считать, что $z = re^{i\theta}$, $0 \le r < 1$, $0 \le \theta < 2\pi$. В этих условиях

$$\varphi_k\left(re^{i\theta}\right) = \frac{1}{1-e^{-k}}\left(1 - e^{-k(1+r\cos\theta)}(\cos\ (kr\sin\theta) - i\sin\,(kr\sin\theta))\right),$$

поэтому

$$u(r,\theta) = Re\ \varphi_k\left(re^{i\theta}\right) = \frac{1}{1-e^{-k}}\left(1 - e^{-k(1+r\cos\theta)}\cos\ (kr\sin\theta)\right), \qquad (11)$$

По теореме 2 функция $\varphi_k(z)$ является симметричной относительно действительной оси, то есть, $\varphi_k(\overline{z}) = \overline{\varphi_k(z)}, z \in E$. В силу этого достаточно исследовать функцию $u(r,\theta)$ для $\theta \in [0,\pi]$.

Зафиксирует r, $0 \le r < 1$, и вычислим производную функции $u(r,\theta)$

$$\frac{\partial u}{\partial\theta} = \frac{kr}{1-e^{-k}}e^{-k(1+r\cos\theta)}\sin(kr\sin\theta - \theta). \qquad (12)$$

Поскольку множитель перед синусом является положительным, то знак производной $\partial u/\partial\theta$ совпадает со знаком $\sin(kr\sin\theta - \theta)$. Введем обозначения

$$g(\theta) = \sin(kr\sin\theta - \theta)\,, 0 \le \theta \le \pi, \qquad (13)$$

$$g_1(\theta) = kr\sin\theta - \theta.$$

Тогда $g(\theta) = \sin g_1(\theta)$. Рассмотрим следующие случаи.

1) Пусть $0 < k \le 1$. Поскольку в этом случае $g_1'(\theta) = kr\cos\theta - 1 < 0$ на $[0,\pi]$, то функция $g_1(\theta)$ монотонно убывает на $[0,\pi]$ и поэтому

$$-\pi = g_1(\pi) \le g_1(\theta) \le g_1(0) = 0 \text{ на } [0,\pi].$$

В силу этого $g(\theta) = \sin g_1(\theta) \le 0$ для $\theta \in [0,\pi]$ и на основе равенств (12) и (13) видим, что

$$\frac{\partial u}{\partial\theta} = \frac{kr}{1-e^{-k}}e^{-k(1+r\cos\theta)}g(\theta) \le 0 \qquad (14)$$

на отрезке $[0,\pi]$. Поэтому функция $u(r,\theta)$ является невозрастающей на $[0,\pi]$ и для всех r, $0 \le r < 1$, выполняется оценка

$$\varphi_k(-r) = u(r,\pi) \le Re\ \varphi_k(z) \le u(r,0) = \varphi_k(r), \qquad (15)$$

приводящая к оценке (8).

2) Пусть $1 < k \le \pi$. Здесь рассмотрим два подслучая.

Если $r \le 1/k$, то тогда $kr \le 1$ и поэтому $g_1'(\theta) = kr\cos\theta - 1 < 0$ на $[0,\pi]$. Следовательно, аналогично случаю $0 < k \le 1$ неравенство (14) выполняется. Поэтому функция $u(r,\theta)$ не возрастает на $[0,\pi]$ и для $|z| \le r$, $0 \le r \le 1/k$, имеет место оценка (15), равносильная оценке (9).

Пусть теперь $1/k < r < 1$. Тогда $kr > 1$. Так как $g_1'(\theta) = kr\cos\theta - 1$, то функция $g_1(\theta)$ на $[0,\pi]$ имеет единственную критическую точку

$$\theta_0 = \arccos\frac{1}{kr} \in (0,\pi/2)\,.$$

При этом, $g_1'(\theta) \ge 0$ на $[0,\theta_0]$ и $g_1'(\theta) \le 0$ на $[\theta_0,\pi]$. Поэтому $g_1(\theta)$ возрастает на $[0,\theta_0]$, убывает на $[\theta_0,\pi]$ и в точке θ_0 имеет максимум.

Поскольку $g_1(\theta)$ убывает на $[\theta_0,\pi]$, причем $g_1(\theta_0) > 0$ и $g_1(\pi) = -\pi < 0$, то на интервале (θ_0,π) существует точка θ_1, в которой $g_1(\theta) = 0$, то есть $kr\sin\theta_1 - \theta_1 = 0$. При этом, $g_1(\theta) \ge 0$ на $[0,\theta_1]$ и $g_1(\theta) \le 0$ на $[\theta_1,\pi]$. Кроме того,

$$0 \le g_1(\theta) \le g_1(\theta_0) \le kr < \pi \text{ на } [0,\theta_1] \text{ и } -\pi \le g_1(\theta) \le 0 \text{ на } [\theta_1,\pi].$$

Учитывая, что $g(\theta) = \sin(kr\sin\theta - \theta) = \sin g_1(\theta)$, на основании предыдущего получаем, что

$$g(\theta) \begin{cases} > 0 \text{ на } [0, \theta_1], \\ < 0 \text{ на } [\theta_1, \pi]. \end{cases}$$

Поэтому, опираясь на (12) и (13) получаем, что

$$\frac{\partial u}{\partial \theta} \begin{cases} > 0 \text{ на } [0, \theta_1], \\ < 0 \text{ на } [\theta_1, \pi]. \end{cases}$$

Значит, функция $u(r, \theta)$ в точке θ_1 имеет максимум, а в точке π – минимум. Поэтому

$$u(r, \pi) \le Re\ \varphi_k(z) \le u(r, \theta_1) = \frac{1}{1 - e^{-k}}\left(1 - e^{-k(1 + r\cos\theta_1)}\cos\ (kr\sin\theta_1)\right).$$

Вспоминая, что $kr\sin\theta_1 = \theta_1$, то отсюда получаем оценку (10).

5 Выводы

В данной статье мы исследует функцию Каратеодори, определенную по формуле (6). Для нее выведены такие важные свойства, как положительность действительной части, симметрия образа единичного круга относительно действительной оси, выпуклость и почти выпуклость функции при определенных значениях параметра, а также оценки действительной части в любом круге радиуса r, $0 \le r < 1$.

Для наглядности, с помощью компьютерных средств получены образы единичной окружности при отображении с помощью функции (6), демонстрирующие некоторые из вышеперечисленных свойств.

Полученные свойства послужат основой для исследования классов регулярных функций, заданных на основе данной функции Каратеодори.

Список литературы

1 Авхадиев Ф.Г., Аксентьев Л.А. Основные результаты в достаточных условиях однолистности аналитических функций // УМН. – 1975. – Т.30, выпуск 4(184). – С. 3-60. – URL: https://www.mathnet.ru/rus/rm4232.

2 Голузин Г.М. Геометрическая теория функций комплексного переменного. – М: Наука, 1969. – 628 с.

3 Kaplan W. (1952) Close-to-convex schlicht functions. *Michigan Math. J.,* 1(2). pp. 169-185. – doi: https://doi.org/10.1307/mmj/1028988895.

4 Renyi A. (1959) Some remarks on univalent functions // *Ann. Univ. Mariae Curie-Sklodowska*. Sec. 1959. Sec. A. 3, pp. 111-121. – URL: http://sci-gems.math.bas.bg:8080/jspui/bitstream/10525/2878/1/1959-111-121.pdf.

5 Reade M. (1956) The coefficients of close-to-convex functions // *Duke Math. J.* V. 23. №3. pp. 459-462. – URL: https://doi.org/10.1215/S0012-7094-56-02342-0.

МАЙЕР, Ф.Ф., НАРИЖНЯЯ, Т.И.

КАРАТЕОДОРИЯНЫҢ ЕРЕКШЕ ТҮРІНІҢ БІР ФУНКЦИЯСЫ ТУРАЛЫ

$\varphi(0) = 1$ *шартымен нормаланған және оң нақты бөлігіне ие, бірлік дискідегі регулярлы* $\varphi(z)$ *Каратеодорлық функциялар класы геометриялық функция теориясында маңызды рөл атқарады. Каратеодори класы тұрақты функциялардың әртүрлі класстарын ыңғайлы түрде анықтауға ғана емес, сонымен қатар осы сыныптарды зерттеуге мүмкіндік береді. Каратеодорлық функцияларды пайдалана отырып, біз жұлдыз тәрізді, дерлік дөңес және басқа функцияларды қоса алғанда, бірвалентті функциялар класының көптеген ішкі сыныптарын анықтаймыз. Сонымен қатар, осы ішкі сыныптар бойынша көптеген экстремалды есептерді шешу оң нақты бөлігі бар функцияларды талдауға дейін төмендейді.*

Бұл мақалада белгілі бір функциялар сыныптарын анықтауда кейіннен бағыныштылық ретінде қызмет ететін белгілі бір каратеодорлық функция қарастырылады. Зерттеу барысында біз

бұл функцияның әртүрлі геометриялық қасиеттерін белгілейтін боламыз, соның ішінде r, $0 \le r < 1$, радиусы бар дискідегі осы функцияның нақты бөлігі үшін нақты бағалауларды аламыз.

Осы мақаланың нәтижелері тұрақты функциялардың белгілі бір сыныптарын одан әрі зерттеу үшін негіз болады.

Түйінді сөздер: *Каратеодорлық функциялар, дөңес функциялар, дерлік дөңес функциялар, аналитикалық функцияларды бағалау.*

MAYER, F.F., NARIZHNYAYA, I.I.

ON A SPECIAL TYPE OF CARATHÉODORY FUNCTION

The class of Carathéodory functions $\varphi(z)$, regular on the unit disk, normalized by the condition $\varphi(0) = 1$, and having a positive real part, plays an important role in geometric function theory. The Carathéodory class allows us not only to conveniently define various classes of regular functions but also to study these classes. Using Carathéodory functions, we define many subclasses of the class of univalent functions, including star-shaped, close-to-convex, and other functions. Moreover, the solution of many extremum problems on these subclasses reduces to the analysis of functions with a positive real part.

This article examines a specific Carathéodory function, which will subsequently serve as a subordination majorant in defining certain classes of functions. During the study, we will establish various geometric properties of this function, including obtaining precise estimates for the real part of this function in a circle of radius r, $0 \le r < 1$.

The results stated in this article will form the foundation for further research on certain classes of regular functions.

Key words: *Carathéodory functions, convex functions, close-to-convex functions, estimates of analytic functions.*

Сведения об авторах:

Майер Федор Федорович *– кандидат физико-математических наук, доцент, ассоциированный профессор, факультет машиностроения, энергетики и информационных технологий, кафедра математики и физики, Костанайский региональный университет имени Ахмет Байтұрсынұлы, г. Костанай, Республика Казахстан.*

Нарижняя Ирина Игоревна *– магистрант ОП 7М05401 Математика, факультет машиностроения, энергетики и информационных технологий, кафедра математики и физики, Костанайский региональный университет имени Ахмет Байтұрсынұлы, г. Костанай, Республика Казахстан.*

Майер Федор Федорович *– физика-математика ғылымдарының кандидаты, доцент, машина жасау, энергетика және ақпараттық технологиялар факультеті, математика және физика кафедрасы, Ахмет Байтұрсынұлы атындағы Қостанай Өңірлік университеті, Қостанай қ., Қазақстан Республикасы.*

Нарижная Ирина Игоревна *– ОП 7М05401 Математика мамандығының магистранты, машина жасау, энергетика және ақпараттық технологиялар факультеті, математика және физика кафедрасы, Ахмет Байтұрсынұлы атындағы Қостанай Өңірлік университеті, Қостанай қ., Қазақстан Республикасы.*

Mayer Fyodor Fyodorovich *– Candidate of Physical and Mathematical Sciences, Associate Professor, Faculty of Mechanical Engineering, Power engineering and Information Technologies, Department of Mathematics and Physics, Akhmet Baitursynuly Kostanay Regional University, Kostanay, Republic of Kazakhstan.*

Narizhnyaya Irina Igorevna *– Master student of the "7M05401 Mathematics" educational program, Faculty of Mechanical Engineering, Power engineering and Information Technologies, Department of Mathematics and Physics, Akhmet Baitursynuly Kostanay Regional University, Kostanay, Republic of Kazakhstan.*

МАЗМҰНЫ

БІЛІМ БЕРУ

Бекбулатова, А.Б. «АДАЛ АЗАМАТ» БІРТҰТАС ТӘРБИЕ БАҒДАРЛАМАСЫН ЖҮЗЕГЕ АСЫРУДА БІЛІМ АЛУШЫЛАРДЫҢ МЕДИАСАУАТТЫЛЫҒЫНЫҢ МАҢЫЗЫ 3

Елеусизова, Г.А., Утегенова, Б.М. БАСТАУЫШ МЕКТЕПТЕ ҰЖЫМДЫҚ ӨЗАРА ӘРЕКЕТТЕСУДІ ҰЙЫМДАСТЫРУ СТРАТЕГИЯЛАРЫН ҚОЛДАНУДАҒЫ ЦИФРЛЫҚ ТЕХНОЛОГИЯЛАРДЫҢ РӨЛІ 8

Казкенова, М.С., Утегенова, Б.М. ПЕДАГОГИКАЛЫҚ ЖАСАҚ БОЛАШАҚ ПЕДАГОГТАРДЫ ТӘЖІРИБЕГЕ БАҒДАРЛАНҒАН ОҚЫТУ МОДЕЛІ РЕТІНДЕ 16

Карпова, К.В., Калимжанова, Р.Л. ЖОҒАРЫ ОҚУ ОРЫНДАҒЫ СТУДЕНТТЕРДІҢ МАЗАСЫЗДЫҒЫН ТӨМЕНДЕТУДІҢ ПЕДАГОГИКАЛЫҚ ЖӘНЕ ПСИХОЛОГИЯЛЫҚ СТРАТЕГИЯЛАРЫ 26

ГУМАНИТАРЛЫҚ ЖӘНЕ ӨНЕР ҒЫЛЫМДАРЫ

Әбсадық, А.А., Симонова, А.С. Б. МАНСҰРОВТЫҢ «СҰЛТАН БЕЙБАРС» ФИЛЬМІНДЕГІ ОТАН МЕН ТҮБІРІН ІЗДЕУ ТАҚЫРЫБЫ 34

Қожанұлы, М. АДАМНЫҢ ЖАС ЕРЕКШЕЛІКТЕРІ ТУРАЛЫ БІРЕР СӨЗ 38

Шолпанбаева, Г.А., Адилов, Н.Е. КИІЗ ҮЙ КӨШПЕЛІ ӨРКЕНИЕТТІҢ КИЕЛІ МҰРАСЫ 50

ЖАРАТЫЛЫСТАНУ ҒЫЛЫМДАРЫ

Майер, Ф.Ф., Нарижняя, И.И. КАРАТЕОДОРИЯНЫҢ ЕРЕКШЕ ТҮРІНІҢ БІР ФУНКЦИЯСЫ ТУРАЛЫ 55

Тажиев, С.Р., Тоқтар, Ә.Т., Нұрғазиева, А.А., Мұртазин, Е.Ж. ЖАМБЫЛ ОБЛЫСЫНДАҒЫ ҚЫРҒЫЗ АЛАТАУЫНЫҢ ЕТЕГІНДЕГІ ЖЕРАСТЫ СУЛАРЫНЫҢ РЕСУРСТЫҚ ӘЛЕУЕТІ 64

АУЫЛ ШАРУАШЫЛЫҒЫ ЖӘНЕ ВЕТЕРИНАРИЯ ҒЫЛЫМДАРЫ

Бабич, Е.А., Швецова, Т.В., Мухтаров, Н.С. СЫЗЫҚТЫҚ СЫРТҚЫ БАҒАЛАУ ЖӘНЕ ОНЫ САУЫН МАЛ ОТАРЫНДА ПАЙДАЛАНУ 73

Мухтаров, Н.С., Елеуов, Б.М., Адырбаев, Е.М., Балабаев, Б.К. СОЛТҮСТІК ҚАЗАҚСТАН ЖАҒДАЙЫНДА КҮЗДІК БИДАЙ ЕГІСТЕРІНЕ ФУНГИЦИДТЕРДІҢ ӘСЕРІ 80

Мухтаров, Н.С., Елеуов, Б.М., Адырбаев, Е.М., Балабаев, Б.К. СОЛТҮСТІК ҚАЗАҚСТАН ЖАҒДАЙЫНДА РАПС ЕГІСТЕРІНДЕ ИНСЕКТИЦИДТЕРДІҢ ӘСЕРІН БАҒАЛАУ 90

ӘЛЕУМЕТТІК ҒЫЛЫМДАР

Байжанова, Л.А.-Н. ҚАЗАҚСТАННЫҢ ЕТ ӨНДІРІСІ САЛАСЫНЫҢ ИНВЕСТИЦИЯЛЫҚ ӘЛЕУЕТІ: АЙМАҚТЫҚ ТАЛДАУ ЖӘНЕ ХАЛЫҚАРАЛЫҚ ТӘЖІРИБЕ 101

МЕРЕЙТОЙЛЫҚ ҚҰТТЫҚТАУЛАР 108

АВТОРЛАРДЫҢ НАЗАРЫНА 110

СОДЕРЖАНИЕ

ОБРАЗОВАНИЕ

Бекбулатова, А.Б. ЗНАЧЕНИЕ МЕДИАГРАМОТНОСТИ УЧЕНИКОВ В РЕАЛИЗАЦИИ КОМПЛЕКСНОЙ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЙ ПРОГРАММЫ «АДАЛ АЗАМАТ» 3

Елеусизова, Г.А., Утегенова, Б.М. РОЛЬ ЦИФРОВЫХ ТЕХНОЛОГИЙ В ИСПОЛЬЗОВАНИИ СТРАТЕГИЙ ОРГАНИЗАЦИИ КОЛЛЕКТИВНОГО ВЗАИМОДЕЙСТВИЯ В НАЧАЛЬНОЙ ШКОЛЕ 8

Казкенова, М.С., Утегенова, Б.М. ПЕДАГОГИЧЕСКИЙ ОТРЯД КАК МОДЕЛЬ ПРАКТИКО-ОРИЕНТИРОВАННОГО ОБУЧЕНИЯ БУДУЩИХ ПЕДАГОГОВ 16

Карпова, К.В., Калимжанова, Р.Л. ПЕДАГОГИЧЕСКИЕ И ПСИХОЛОГИЧЕСКИЕ СТРАТЕГИИ СНИЖЕНИЯ ТРЕВОЖНОСТИ СТУДЕНТОВ В ВУЗЕ 26

ГУМАНИТАРНЫЕ НАУКИ И ИСКУССТВО

Әбсадық, А.А., Симонова, А.С. ТЕМА РОДИНЫ И ПОИСКА ИСТОКОВ В ФИЛЬМЕ Б.МАНСУРОВА «СУЛТАН БЕЙБАРС» 34

Қожанұлы, М. НЕСКОЛЬКО СЛОВ О ВОЗРАСТНЫХ ОСОБЕННОСТЯХ ЧЕЛОВЕКА 38

Шолпанбаева, Г.А., Адилов, Н.Е. ЮРТА – СВЯЩЕННОЕ НАСЛЕДИЕ КОЧЕВОЙ ЦИВИЛИЗАЦИИ 50

ЕСТЕСТВЕННЫЕ НАУКИ

Майер, Ф.Ф., Нарижняя, И.И. ОБ ОДНОЙ ФУНКЦИИ КАРАТЕОДОРИ СПЕЦИАЛЬНОГО ВИДА 55

Тажиев, С.Р., Тоқтар, Ә.Т., Нургазиева, А.А., Муртазин, Е.Ж. РЕСУРСНЫЙ ПОТЕНЦИАЛ ПОДЗЕМНЫХ ВОД ПРЕДГОРИЙ КЫРГЫЗСКОГО АЛАТАУ В ЖАМБЫЛСКОЙ ОБЛАСТИ 64

СЕЛЬСКОХОЗЯЙСТВЕННЫЕ, ВЕТЕРИНАРНЫЕ НАУКИ

Бабич, Е.А., Швецова, Т.В., Мухтаров, Н.С. ЛИНЕЙНАЯ ОЦЕНКА ЭКСТЕРЬЕРА И ЕЁ ИСПОЛЬЗОВАНИЕ В СТАДАХ МОЛОЧНОГО СКОТА 73

Мухтаров, Н.С., Елеуов, Б.М., Адырбаев, Е.М., Балабаев, Б.К. ДЕЙСТВИЕ ФУНГИЦИДОВ В ПОСЕВАХ ПШЕНИЦЫ ОЗИМОЙ В УСЛОВИЯХ СЕВЕРНОГО КАЗАХСТАНА 80

Мухтаров, Н.С., Елеуов, Б.М., Адырбаев, Е.М., Балабаев, Б.К. ОЦЕНКА ВОЗДЕЙСТВИЯ ИНСЕКТИЦИДОВ НА ПОСЕВЫ РАПСА В УСЛОВИЯХ СЕВЕРНОГО КАЗАХСТАНА 90

СОЦИАЛЬНЫЕ НАУКИ

Байжанова, Л.А.-Н. ИНВЕСТИЦИОННЫЙ ПОТЕНЦИАЛ МЯСНОЙ ОТРАСЛИ КАЗАХСТАНА: РЕГИОНАЛЬНЫЙ АНАЛИЗ И МЕЖДУНАРОДНЫЙ ОПЫТ 101

ЮБИЛЕЙНЫЕ ПОЗДРАВЛЕНИЯ 108

ИНФОРМАЦИЯ ДЛЯ АВТОРОВ 113

CONTENT

EDUCATION

Bekbulatova, A.B. IMPORTANCE OF STUDENTS' MEDIA LITERACY IN THE IMPLEMENTATION OF THE "ADAL AZAMAT" COMPREHENSIVE EDUCATIONAL PROGRAM 3

Yeleussizova, G.A., Utegenova, B.M. THE ROLE OF DIGITAL TECHNOLOGIES IN USING STRATEGIES FOR ORGANIZING COLLECTIVE INTERACTION IN PRIMARY SCHOOLS 8

Kazkenova, M.S., Utegenova, B.M. PEDAGOGICAL TEAM AS A MODEL OF PRACTICE-ORIENTED TRAINING FOR FUTURE TEACHERS 16

Karpova, K.V., Kalimzhanova, R.L. PEDAGOGICAL AND PSYCHOLOGICAL STRATEGIES FOR REDUCING STUDENTS' ANXIETY IN HIGHER EDUCATION 26

HUMANITIES AND ARTS

Absadyk, A.A., Simonova, A.S. THE THEME OF HOMELAND AND THE SEARCH FOR ROOTS IN B. MANSUROV'S FILM "SULTAN BEIBARS" 34

Kozhanuly, M. A FEW WORDS ABOUT THE AGE CHARACTERISTICS OF A PERSON 38

Sholpanbayeva, G.A., Adilov, N.Ye. YURT IS A SACRED HERITAGE OF A NOMADIC CIVILIZATION 50

NATURAL SCIENCES

Mayer, F.F., Narizhnyaya, I.I. ON A SPECIAL TYPE OF CARATHÉODORY FUNCTION 55

Tazhiyev, S.R., Toktar, A.T., Nurgaziyeva A.A., Murtazin Ye.Zh. GROUNDWATER RESOURCE POTENTIAL OF THE FOOTHILLS OF THE KYRGYZ ALATAU IN THE ZHAMBYL REGION 64

AGRICULTURAL, VETERINARY SCIENCES

Babich Ye.A., Shvetsova T.V., Mukhtarov N.S. LINEAR BODY CONFORMATION ASSESSMENT AND ITS USE IN DAIRY CATTLE HERDS 73

Mukhtarov, N.S., Yeleuov, B.M., Adyrbayev, Ye.M., Balabayev, B.K. THE EFFECT OF FUNGICIDES ON WINTER WHEAT CROPS IN THE CONDITIONS OF NORTHERN KAZAKHSTAN 80

Mukhtarov, N.S., Yeleuov, B.M., Adyrbayev, Ye.M., Balabayev, B.K. ASSESSMENT OF THE IMPACT OF INSECTICIDES ON RAPESEED CROPS IN THE CONDITIONS OF NORTHERN KAZAKHSTAN 90

SOCIAL SCIENCES

Baizhanova, L.A.-N. INVESTMENT POTENTIAL OF KAZAKHSTAN'S MEAT INDUSTRY: REGIONAL ANALYSIS AND INTERNATIONAL EXPERIENCE 101

ANNIVERSARY CONGRATULATIONS 108

INFORMATION FOR AUTHORS 116

Редактор, корректор: *А. Симонова*
Корректорлар: *Б. Сыздыкова, Т. Цай*
Компьютерлік беттеу: *С. Красикова, И. Милокумова*

Редактор, корректор: *А. Симонова*
Корректоры: *Б. Сыздыкова, Т. Цай*
Компьютерная верстка: *С. Красикова, И. Милокумова*

Басуға 08.10.2025 ж. берілді.
Пішімі 60х84/8. Көлемі 9,0 б.т.
Тапсырыс № 031

Ахмте Байтұрсынұлы атындағы
Қостанай өңірлік университетіндегі
редакциялық-баспа бөлімінде басылған
Қостанай қ., Байтұрсынов к., 47

Подписано в печать 08.10.2025 г.
Формат 60х84/8. Объем 9,0 п.л.
Заказ № 031

Отпечатано в редакционно-издательском отделе
Костанайского регионального университета
имени Ахмет Байтұрсынұлы
г. Костанай, ул. Байтурсынова, 47