

образования – один из путей интеграции в мировую систему среднего образования. Білім - Образование -2004 №1 с.147-153.

3. А.Е.Абылкасымова, В.Е. Корчевский, А. Абдиев,З.А. Жумагулова Алгебра: учебник для 8 класса общеобразовательных школ.- 2-е издание, переработан.- Алматы: Мектеп, 2012. – 152с.

4. А.Е.Абылкасымова, В.Е. Корчевский, А. Абдиев,З.А. Жумагулова Алгебра: учебник для 9 класса общеобразовательных школ.- 3-е издание, переработан.- Алматы: Мектеп, 2013. – 256 с.

Қасымқанұлы Б.¹,Серикова А.А.²

1. Ғылыми жетекші, физика-математика ғылымдарының кандидаты, доцент

2. Физика-математика және жалпы техникалық пәндер кафедрасы,
«Математика» мамандығының 4 курс студенті

ТОПТЫҢ ЖӘНЕ ОЛАРДЫҢ ГОМОМОРФИЗМДЕРІНІҢ ТІЗБЕГІ

A және B – еркін топтар $\alpha: A \rightarrow B$ немесе $A \xrightarrow{\alpha} B$ бейнеленуі $a \in A$ A -ның әр элементіне $b \in B$ -ң бір элементін сәйкес қойылатын $\alpha: a \mapsto b$ деп белгіленетін функция. b α бейнелеуінен пайда болған a элементінің бейнесі және $b = \alpha(a)$ деп белгіленеді немесе $b = \alpha a$. A тобы α бейнеленуінің анықталу облысы немесе облысы деп аталады, B тобының мәндер жиыны $\alpha: A \rightarrow B$ бейнеленуі гомоморфизм деп аталады, егер ол $a_1, a_2 \in A$ үшін

$$\alpha(a_1 + a_2) = \alpha(a_1) + \alpha(a_2)$$

Гомоморфизмді $\alpha: A \rightarrow B$ деп белгілеуге болады. Кез-келген $\alpha: A \rightarrow B$ гомоморфизмімен екі ішкі топ байланысты $\text{Ker } \alpha \subseteq A$ және $\text{Im } \alpha \subseteq B$. Гомоморфизмінің өзегі α . $\text{Ker } \alpha = \{0 \mid \alpha a = 0, a \in A\}$, α гомоморфизмінің бейнесі $\text{Im } \alpha$ кейбір $a \in A$ үшін $\alpha a = b$ болатын барлық $b \in B$, $\text{Im } \alpha = \{b \mid \alpha(a) = b, b \in B\}$ Егер $\text{Im } \alpha = B$, онда α гомоморфизмі сюрективті немесе эпиморфизм деп аталады. Егер $\text{Ker } \alpha = 0$, онда α – мономорфизм. Егер $\text{Im } \alpha \subseteq B$, және $\text{Ker } \alpha = \{0\}$, онда α – A және B арасындағы өзара бір мәнді сәйкестік. (яғни α – биективті), осы жағдайда α – изоморфизм. A және B топтары изоморфты деп аталады. $A \cong B$ егер $\alpha: A \rightarrow B$ изоморфизмі бар болса. Онда $\alpha^{-1}: B \rightarrow A$ кері бейнеленуі бар болады және ол изоморфты. Егер $G \subseteq A$ және B топтың ішкі тобы болса және $\alpha: A \rightarrow B$ гомоморфизмі G тобының элементтерін орнында қалдырса, онда $\alpha|_G$ гомоморфизм болады. $\text{Im } \alpha = \{0\}$ бейнесі 0 гомоморфизм нольдік гомоморфизм деп аталады және 0 деп белгіленеді. Егер $A \subseteq B$, ала $\alpha: A \rightarrow B$ әрбір элементін өзіне бейнелесе, онда A -дан B -ға бейнелеуді инъекция деп қарастыруға болады. $O \rightarrow A$ O -тобының A тобына бейнелейтін жалғыз гомоморфизм.

$$\text{Im } \alpha = \text{Dom } \beta$$

$\alpha: A \rightarrow B$ және $\beta: B \rightarrow C$ гомоморфизмдер болсын, мұнда α гомоморфизмнің мәндер облысы β гомоморфизмнің мәндер облысына сәйкес $A \rightarrow B \rightarrow C$ құрама бейнелеуді α және β гомоморфизмдерінің көбейтіндісі деп аталады және $\beta * \alpha$ немесе $\beta\alpha$ деп бейнелейді. Олардың көбейтіндісі гомоморфизм болады. Себебі, барлық $a \in A$ үшін.

$$(\beta\alpha)(a) = \beta(\alpha(a))$$

Егер $\beta\alpha$ және $\alpha\beta$ көбейтіндісі табылса, онда $\alpha(\beta\alpha) = (\alpha\beta)\alpha$ – амал ассоциатты.

Бұл жерді теңдіктің екі жағын да α – ға (оң жағын) қысқартуға болады, яғни:

$$\beta\alpha = \gamma\alpha,$$

$$\beta = \gamma$$

Сонда тек сонда ғана α – эпиморфизм және α – ны сол жағынан қысқартуға болса,

$$\alpha\beta = \alpha\gamma$$

$$\beta = \gamma$$

сонда, тек сонда ғана α – мономорфизм.

Екі эпиморфизмнің (мономорфизмнің) көбейтіндісі эпиморфизм (мономорфизм) болады.

A тобының өзіне бейнеленуі эндоморфизм, ал өз-өзіне бейнеленуі автоморфизм. 1_A – A тобына автоморфизмі болады, егер сол жағында тұрған көбейтінді анықталған болса.

$$1_A\alpha = \alpha, \beta 1_A = \beta.$$

Анықтама. A_i топтың және олардың α_i гомоморфизмдерінің тізбегі

$A_0 \xrightarrow{\alpha_1} A_1 \xrightarrow{\alpha_2} \dots \xrightarrow{\alpha_k} A_k$ ($k \geq 2$) дәл (точная) деп аталады, егер :

$$\text{Im}\alpha_i = \text{Ker}\alpha_{i+1} \quad i=1, \dots, k-1.$$

$$0 \rightarrow A \xrightarrow{\alpha} B$$

тізбегі сонда, тек сонда ғана дәл, егер α – мономорфизм, ал

$$B \xrightarrow{\beta} C \rightarrow 0$$

тізбегі сонда тек сонда ғана β – эпиморфизм болса.

$$\text{Im}\alpha = \text{Ker}\beta = 0$$

$0 \rightarrow A \xrightarrow{\alpha} B \rightarrow 0$ тізбегі α – изоморфизміне эквивалентті.

Анықтама.

$$0 \rightarrow A \xrightarrow{\alpha} B \xrightarrow{\beta} C \rightarrow 0$$

дәл тізбегі қысқа дәл (короткая точная) тізбегі деп аталады. Мұндағы α – өзегі $\text{Im } \alpha$ болатын A және B топтарының бөлігі β – эпиморфизмі.

Лемма 1.

G

(1)

$$\begin{array}{ccccc} & & & & \downarrow \\ & & & & \beta \\ O \rightarrow A & \xrightarrow{\alpha} & B & \rightarrow & C \end{array}$$

дәл (точная) жолы бар диаграммасын коммутатты диаграммаға орналастыруға болады

G

φ

η

(2)

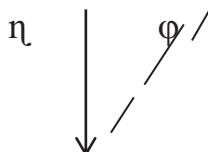


$O \rightarrow A \xrightarrow{\alpha} B \xrightarrow{\beta} C$ сонда тек сонда ғана, егер $\varphi: G \rightarrow A$ гомоморфизмі бірімәнді анықталып, $\beta \eta = 0$ орындалса.

Дәлеллеуі. Егер бізге қажет φ гомоморфизмі бар болса, онда $\eta = \alpha \varphi$ теңдігінен $\beta \eta = \beta \alpha \varphi = 0 \varphi = 0$

анықталады. Яғни, лемманың шарты қажет. Керісінше, егер (1) диаграммада $\beta \eta = 0$, онда $\text{Im } \eta = \text{Ker } \beta$. $\text{Ker } \beta = \text{Im } \alpha$, α – мономорфизм $\rightarrow \varphi = \alpha^{-1} \eta$ -ң G тобынан A тобына бейнеленуі анықталады. Бұл гомоморфизм (2) диаграмманы коммутатты қылатын гомоморфизм. Егер $\varphi': G \rightarrow A$ – сол қасиеттерге ие, бірақ басқа бейнелеу болса, онда $\alpha \varphi' = \eta = \alpha \varphi$ бұдан $\varphi' = \varphi$, себебі α – мономорфизм.

Лемма 2. $A \xrightarrow{\alpha} B \xrightarrow{\beta} C \rightarrow 0$



G

Бұл диаграмманың әрбір дәл жолы $\varphi: C \rightarrow G$ гомоморфизмімен толықтырыла алады және пайда болған диаграмма коммутатты болады сонда тек сонда ғана егер $\eta \alpha = 0$.

Дәлелдеуі. Егер бізге қажет φ гомоморфизмі бар болса, онда $\eta = \varphi \beta$, $\eta \alpha = \varphi \beta \alpha = \varphi 0 = 0$. Енді кері жорыық $\eta \alpha = 0$ және $\varphi: C \rightarrow G$ анықтайық: егер $b \in B$ үшін $\beta b = c$ шарты үшін $\varphi c = \eta b$ орындалса. Бұл анықтама дұрыс, егер $b' \in B$ $\beta b' = c$ шартын орындаса, онда $b' - b \in \text{Ker } \beta = \text{Im } \alpha \subseteq \text{Ker } \eta$ және $\eta b' = \eta b$. Көрсетілген

диаграмманы коммутатты диаграммаға айналдыратын φ гомоморфизмі екендігін көреміз. $\varphi': C \rightarrow G$ үшін де $\varphi'\beta = \eta$ шарты орындалса, онда β -эпиморфизм және $\varphi' = \varphi$.

Лемма 3.

$$\begin{array}{ccccccccc}
 & & & & \alpha_1 & & \alpha_2 & & \alpha_3 & & \alpha_4 & & \\
 & & & & A_1 & \longrightarrow & A_2 & \longrightarrow & A_3 & \longrightarrow & A_4 & \longrightarrow & A_5 \\
 \gamma_1 & \gamma_2 & \gamma_3 & \gamma_4 & \downarrow \gamma_5 & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\
 & & & & B_1 & \xrightarrow{\beta_1} & B_2 & \xrightarrow{\beta_2} & B_3 & \xrightarrow{\beta_3} & B_4 & \xrightarrow{\beta_4} & B_5
 \end{array}$$

- дәл жолдары бар коммутатты диаграмма болсын. Онда:

- (а) егер γ_1 - эпиморфизм, ал γ_2, γ_4 - мономорфизмдер болса, онда γ_3 - мономорфизм;
- (б) егер γ_5 - мономорфизм, ал γ_2, γ_4 - эпиморфизмдер болса, онда γ_3 - эпиморфизм;
- (в) егер γ_1 - эпиморфизм, ал γ_5 - мономорфизм, ал γ_2, γ_4 - изоморфизмдер болса болса, онда γ_3 - изоморфизм;

Дәлелдеуі. (а) шарты орындалады деп жорамал жасайық және $a_3 \in \text{Ker } \gamma_3$ болсын. Үшінші шаршыдағы коммутаттылыққа байланысты $\gamma_4 \alpha_3 a_3 = \beta_4 \gamma_3 a_3 = 0$, бұдан $\alpha_3 a_3 = 0$, себебі γ_4 - мономорфизм. Жоғарғы жол дәл боландықтан, $\alpha_2 a_2 = a_3$ болатындай $a_2 \in A_2$ элементі табылады. Ал екінші шаршының коммутаттылығына сай $\beta_2 \gamma_2 a_2 = \gamma_3 \alpha_2 a_2 = \gamma_3 a_3 = 0$. Асытыңғы жол дәл, себебі кейбір $b_1 \in B_1$ үшін $\beta_1 b_1 = \gamma_2 a_2$, γ_1 - эпиморфизм. $\gamma_2 \alpha_1 a_1 = \beta_1 \gamma_1 a_1 = \beta_1 b_1 = \gamma_2 a_2$, бұдан $\alpha_1 a_1 = a_2$, себебі γ_2 - мономорфизм.

Енді (б) шарты орындалсын және $b_3 \in B_3$. γ_4 - эпиморфизм, сондықтан кейбір $a_4 \in A_4$ үшін $\beta_3 b_3 = \gamma_4 a_4$. Бұдан $\gamma_5 \alpha_4 a_4 = \beta_4 \gamma_4 a_4 = \beta_4 \beta_3 b_3 = 0$, яғни $\alpha_4 a_4 = 0$, себебі γ_3 - мономорфизм. Диаграмманың жоғарғы жолы дәл, сондықтан кейбір $a_4 \in A_4$ үшін $\alpha_3 a_3 = a_4$, бұдан $\beta_3 \gamma_3 a_3 = \gamma_4 \alpha_3 a_3 = \gamma_4 a_4 = \beta_3 b_3$. Төменгі жолдың дәлдігі және γ_2 -нің эпиморфиздігі кейбір $b_2 \in B$ үшін $\beta_2 b_2 = \gamma_3 a_3 - b_3$ және кейбір $a_2 \in A_2$ үшін $\gamma_2 a_2 = b_2$. Бұдан $\gamma_3 \alpha_2 a_2 = \beta_2 \gamma_2 a_2 = \gamma_3 a_3 - b_3 = \gamma_3 (a_3 - \alpha_2 a_2) \in \text{Im } \gamma_3$, яғни γ_3 - эпиморфизм.

(а) және (б) пункттерін біріктірсек, (в) пунктін аламыз.

Қолданылған әдебиеттер тізімі:

1. Фукс Л. Бесконечные абелевы группы. — М., 1974, с. 12-25, с. 211- 243.
2. Каргаполов М.И., Мерзляков Ю.И. — М., 1977, с. 13- 44.
3. Куликов Л.Я. Алгебра и теория чисел. — М.: Высш.школа, 1979. — с. 82, 94- 98.

Демисенов Б.Н.¹, Сманова А.Б.², Кадиева М.Р.³